GÉOMÉTRIE

Cours de mathématiques
Première et deuxième année

Géométrie

Ce recueil regroupe différents chapitres de géométrie de niveau première et deuxième année.

Sommaire

1 La règle et le compas **1**
1 Constructions et les trois problèmes grecs . . . 1
2 Les nombres constructibles à la règle et au compas . . . 7
3 Éléments de théorie des corps . . . 14
4 Corps et nombres constructibles . . . 18
5 Applications aux problèmes grecs . . . 21
6 Exercices . . . 22

2 L'inversion **29**
1 Cercle-droite . . . 29
2 L'inversion . . . 31
3 Les homographies . . . 36
4 Dispositifs mécaniques . . . 39
5 Construction au compas seulement . . . 41
6 Exercices . . . 47

3 La chaînette **51**
1 Le cosinus hyperbolique . . . 52
2 Équation de la chaînette . . . 55
3 Longueur d'une chaînette . . . 59
4 Exercices . . . 62

4 Systèmes itérés de fonctions **65**
1 Introduction . . . 65
2 Topologie de $\mathbb{R}^2$ . . . 66
3 Attracteurs . . . 69
4 Isométries, similitudes . . . 72
5 Exemples à partir de similitudes . . . 76
6 Transformations affines . . . 78
7 Exemples à partir des transformations affines . . . 82
8 Dimension de Hausdorff . . . 84
9 Le théorème du collage et le jeu du chaos . . . 86
10 Exercices . . . 88

5 Mathématiques du GPS **93**
1 L'île aux 7 phares . . . 93
2 Se repérer grâce au GPS . . . 98
3 Temps . . . 106

4 Vitesse 112
5 Systèmes de coordonnées 123
6 Position approchée 134

Chapitre 1

La règle et le compas

Vidéo ■ partie 1. Constructions
Vidéo ■ partie 2. Nombres constructibles
Vidéo ■ partie 3. Éléments de théorie des corps
Vidéo ■ partie 4. Corps et nombres constructibles
Vidéo ■ partie 5. Applications aux problèmes grecs

Vous avez à votre disposition une règle et un compas et bien sûr du papier et un crayon ! Avec si peu de matériel s'ouvre à vous un monde merveilleux rempli de géométrie et d'algèbre.

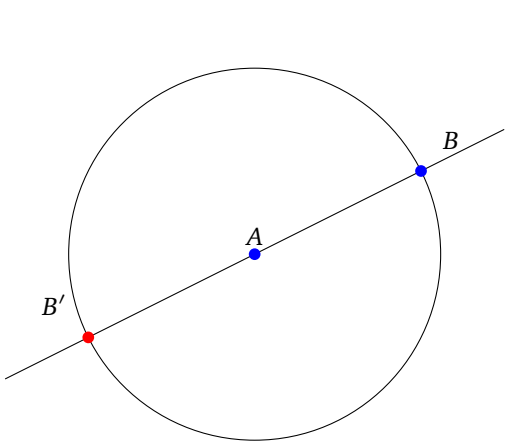
1. Constructions et les trois problèmes grecs

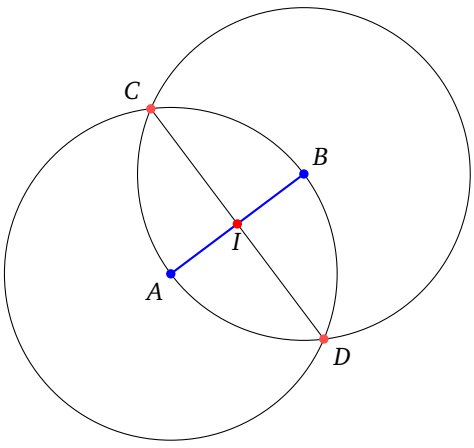
Nous allons voir dans cette première partie que tout un tas de constructions sont possibles. Mais le but de ce cours est de répondre à trois problèmes qui datent des mathématiciens grecs : la trisection des angles, la duplication du cube ainsi que le célèbre problème de la quadrature du cercle.

1.1. Premières constructions géométriques

Nous avons à notre disposition un compas et une règle (non graduée). On démarre par des constructions élémentaires.

- Si A, B sont deux points donnés du plan, alors on peut construire, à la règle et au compas, le ***symétrique*** de B par rapport à A. Pour cela, il suffit juste de tracer la droite (AB) et le cercle de centre A passant par B. Cette droite et ce cercle se coupent en B bien sûr et aussi en $B' = s_A(B)$, le symétrique de B par rapport à A.

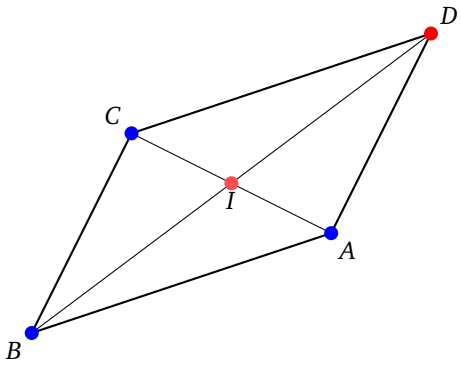


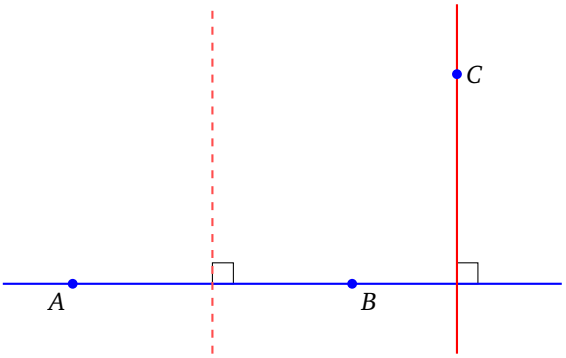


- Si A, B sont deux points donnés du plan, alors on peut construire la ***médiatrice*** de $[AB]$. Pour cela, tracer le cercle centré en A passant par B et aussi le cercle centré en B passant par A. Ces deux cercles

s'intersectent en deux points C, D. Les points C, D appartiennent à la médiatrice de $[AB]$. Avec la règle on trace la droite (CD) qui est la médiatrice de $[AB]$.

- En particulier cela permet de construire le ***milieu*** I du segment $[AB]$. En effet, c'est l'intersection de la droite (AB) et de la médiatrice (CD) que l'on vient de construire.
- Si A, B, C sont trois points donnés alors on peut construire la ***parallèle*** à la droite (AB) passant par C. Tout d'abord construire le milieu I de $[AC]$. Puis construire D le symétrique de B par rapport à I. La figure $ABCD$ est un ***parallélogramme***, donc la droite (CD) est bien la parallèle à la droite (AB) passant par C.



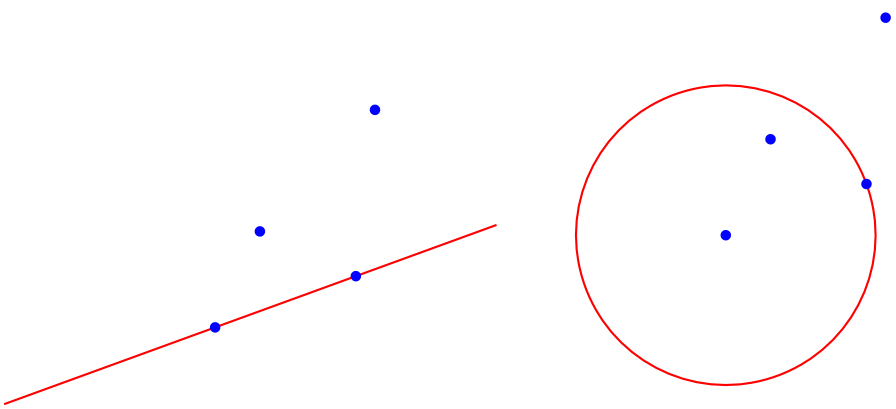


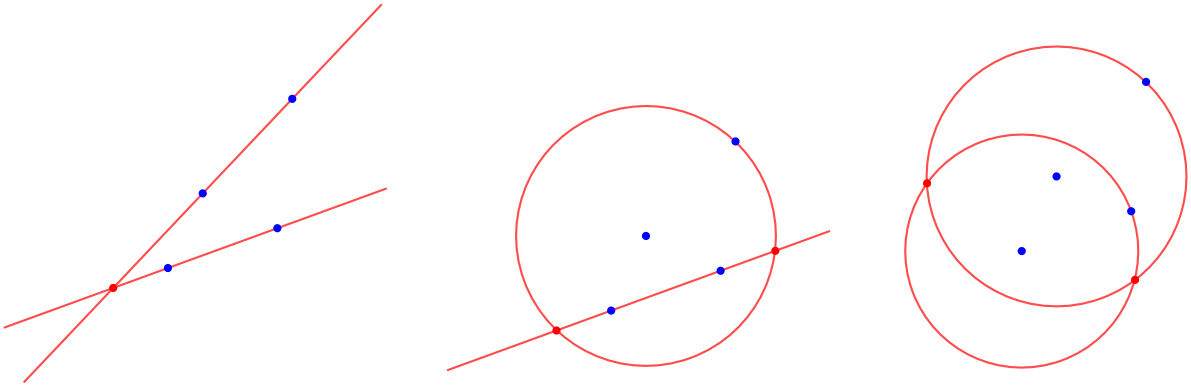
- Pour construire la ***perpendiculaire*** à (AB) passant par un point C, on construit d'abord deux points de la médiatrice de $[AB]$, puis la parallèle à cette médiatrice passant par C.

1.2. Règles du jeu

Il est peut-être temps d'expliquer ce que l'on est autorisé à faire. Voici les règles du jeu : partez de points sur une feuille. Vous pouvez maintenant tracer d'autres points, à partir de cercles et de droites en respectant les conditions suivantes :

- vous pouvez tracer une droite entre deux points déjà construits,
- vous pouvez tracer un cercle dont le centre est un point construit et qui passe par un autre point construit,
- vous pouvez utiliser les points obtenus comme intersections de deux droites tracées, ou bien intersections d'une droite et d'un cercle tracé, ou bien intersections de deux cercles tracés.

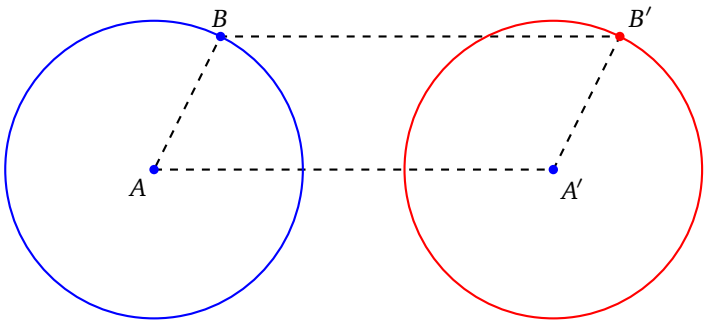




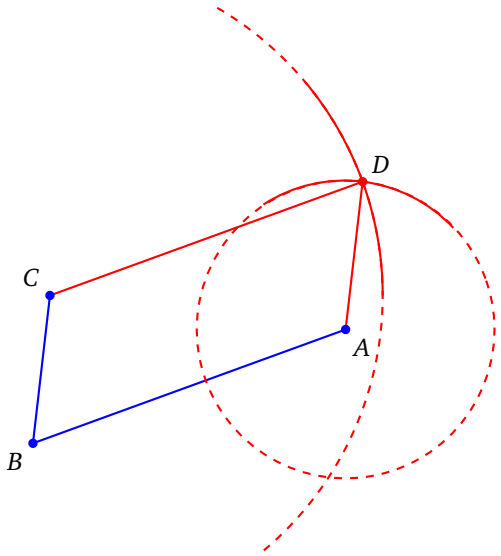
- Une remarque importante : la règle est une règle simple, qui n'est pas graduée.
- Convention pour les couleurs : les points donnés à l'avance sont les points bleus. Les constructions se font en rouge (rouge pâle pour les constructions qui viennent en premier, rouge vif pour les constructions qui viennent en dernier).

1.3. Conserver l'écartement du compas

- On peut ***conserver l'écartement du compas***. C'est une propriété importante qui simplifie les constructions.
  Si l'on a placé des points A, B, A' alors on peut placer la pointe en A avec un écartement de longueur AB. C'est-à-dire que l'on peut mesurer le segment $[AB]$, puis soulever le compas en gardant l'écartement pour tracer le cercle centré en A' et d'écartement AB.
  Cette opération se justifie de la façon suivante : on pourrait construire le point B' tel que $A'ABB'$ soit un parallélogramme et ensuite tracer le cercle centré en A' passant par B'.



- En conservant l'écartement du compas, nous pouvons plus facilement construire les parallélogrammes, avec seulement deux traits de compas. Donnons-nous trois points A, B, C. On mesure l'écartement $[AB]$, on trace le cercle centré en C de rayon AB. Puis on mesure l'écartement $[BC]$ et on trace le cercle centré en A de rayon BC. Ces deux cercles se recoupent en deux points, dont l'un est D, tel que $ABCD$ est un parallélogramme.

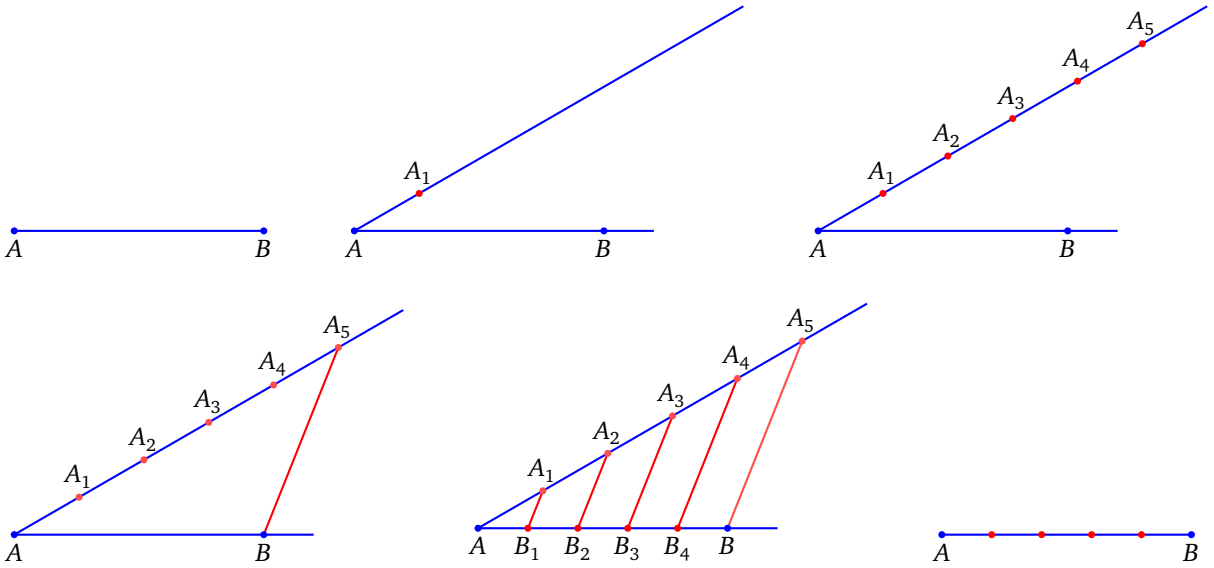


1.4. Thalès et Pythagore

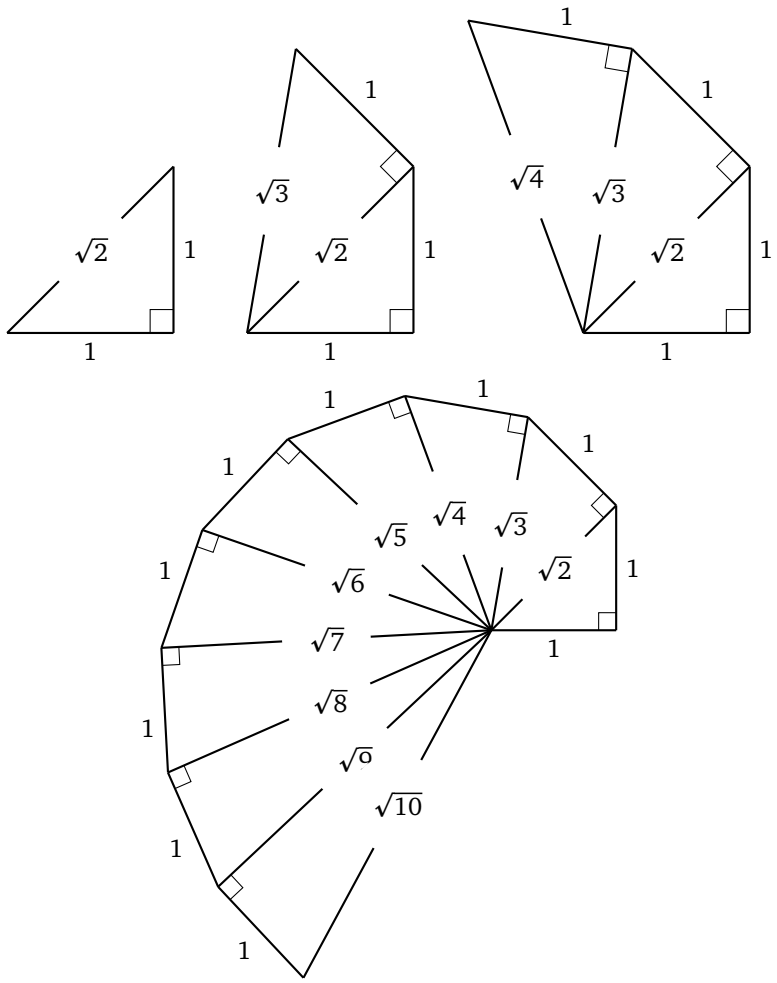
Voyons comment le théorème de Thalès nous permet de diviser un segment en n morceaux.
Fixons n un entier. Voici les étapes pour diviser un segment $[AB]$ en n parts égales.

1. Tracer une droite $\mathscr{D}$ quelconque, passant par A, autre que la droite (AB).
2. Prendre un écartement quelconque du compas. Sur la droite $\mathscr{D}$ et en partant de A, tracer n segments de même longueur. On obtient des points $A_1, A_2, \ldots, A_n$.
3. Tracer la droite (A_nB). Tracer les parallèles à cette droite passant par A_i. Ces droites recoupent le segment $[AB]$ en des points $B_1, B_2, \ldots, B_{n-1}$ qui découpent l'intervalle $[AB]$ en n segments égaux.

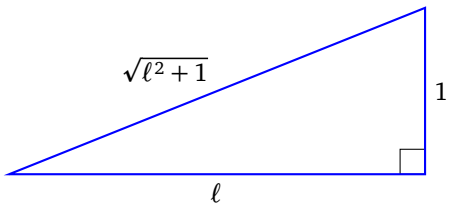
Cette construction fonctionne grâce au théorème de Thalès.



Voyons maintenant comment le théorème de Pythagore va nous permettre de faire apparaître des racines carrées. Supposons que l'on parte d'un segment de longueur 1. Il est facile de construire un segment de longueur $\sqrt{2}$: c'est la longueur de la diagonale du carré de côté 1. Repartons du segment diagonal de longueur $\sqrt{2}$: on construit un triangle rectangle avec un côté de longueur 1, et l'hypoténuse a alors pour longueur $\sqrt{3}$ (voir le calcul plus bas). Repartant de ce segment, on construit un « escargot » avec des segments de longueurs $\sqrt{4}$, $\sqrt{5}$...



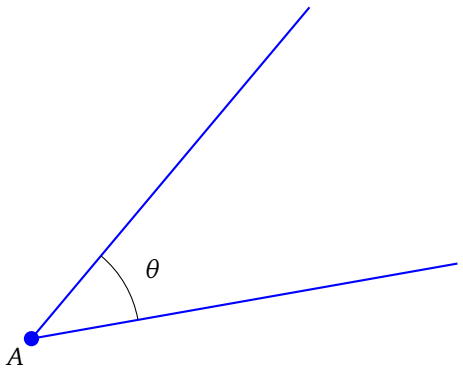
Tout ceci se justifie par le théorème de Pythagore : dans un triangle rectangle ayant un côté de longueur ℓ et un autre de longueur 1, l'hypoténuse est de longueur $\sqrt{\ell^2+1}$. En partant de $\ell_1 = 1$, on trouve $\ell_2 = \sqrt{\ell_1^2+1} = \sqrt{2}$, puis $\ell_3 = \sqrt{\ell_2^2+1} = \sqrt{3}$, $\ell_4 = \sqrt{4} = 2$, et plus généralement $\ell_n = \sqrt{n}$.

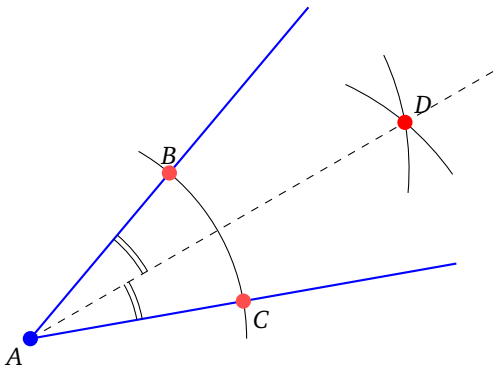


Voici maintenant trois questions qui datent de la Grèce antique et qui vont nous occuper le reste du chapitre.

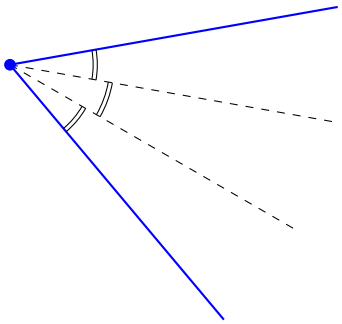
1.5. La trisection des angles

Considérons un angle θ, c'est-à-dire la donnée d'un point A et de deux demi-droites issues de ce point. Nous savons diviser cet angle en deux à l'aide d'une règle et d'un compas : il suffit de tracer la bissectrice. Pour cela on fixe un écartement de compas et on trace un cercle centré en A : il recoupe les demi-droites en des points B et C. On trace maintenant deux cercles centrés en B puis C (avec le même rayon pour les deux cercles). Si D est un point de l'intersection de ces deux cercles alors la droite (AD) est la bissectrice de l'angle.



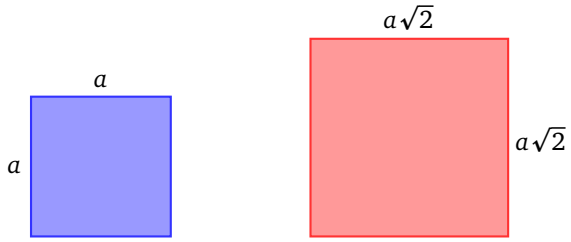


Problème de la trisection. Peut-on diviser un angle donné en trois angles égaux à l'aide de la règle et du compas ?



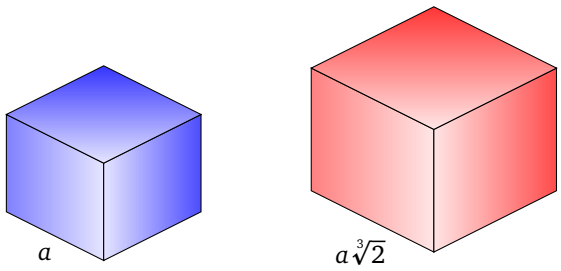
1.6. La duplication du cube

Commençons par un problème assez simple : étant donné un carré, construire (à la règle et au compas) un carré dont l'aire est le double. C'est facile, car cela revient à savoir tracer un côté de longueur $a\sqrt{2}$ à partir d'un côté de longueur a. En fait la diagonale de notre carré original a la longueur voulue $a\sqrt{2}$. Partant de cette longueur, on construit un carré dont l'aire est $(a\sqrt{2})^2 = 2a^2$: son aire est bien le double de celle du carré de départ.



$S = a^2$ $S = 2a^2$

Posons nous la question dans l'espace : étant donné un cube, peut-on construire un second cube dont le volume est le double de celui du premier ? Si le premier cube a ses côtés de longueur a, alors le second doit avoir ses côtés de longueur $a\sqrt[3]{2}$. La question se formule alors de la manière suivante :

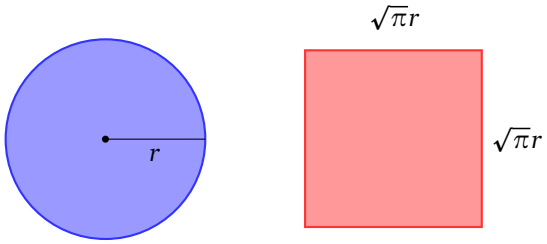


$V = a^3$ $V = 2a^3$

Problème de la duplication du cube. Étant donné un segment de longueur 1, peut-on construire à la règle et au compas un segment de longueur $\sqrt[3]{2}$?

1.7. La quadrature du cercle

Problème de la quadrature du cercle. Étant donné un cercle, peut-on construire à la règle et au compas un carré de même aire ?



$S = \pi r^2$ $S = \pi r^2$

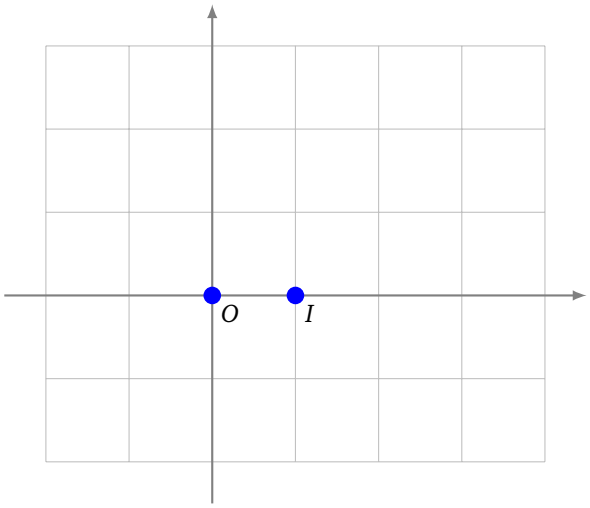
Cela revient à construire un segment de longueur $\sqrt{\pi}$ à la règle et au compas, à partir d'un segment de longueur 1.

2. Les nombres constructibles à la règle et au compas

Pour résoudre les trois problèmes grecs, il va falloir les transformer complètement. D'une question géométrique nous allons passer à une question algébrique. Dans cette partie on ramène le problème de la construction de points dans le plan à la construction de points sur la droite numérique réelle.

2.1. Nombre constructible

On considère le plan euclidien $\mathscr{P}$ muni d'un repère orthonormé, que l'on identifiera à $\mathbb{R}^2$ (ou $\mathbb{C}$). On définit des ensembles de points $\mathscr{C}_i \subset \mathscr{P}$ par récurrence.



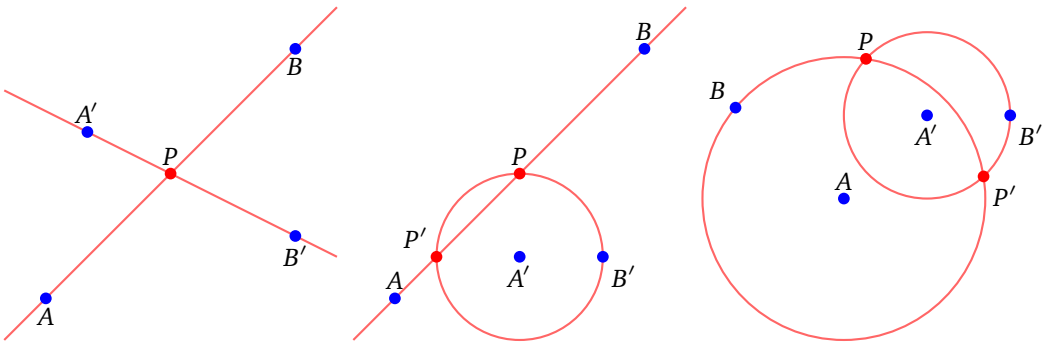
- On se donne au départ seulement deux points : $\mathscr{C}_0 = \{O, I\}$ où $O = (0,0)$ et $I = (1,0)$.
- Fixons $i \geqslant 0$, et supposons qu'un certain ensemble de points $\mathscr{C}_i$ soit déjà construit. Alors on définit $\mathscr{C}_{i+1}$ par récurrence, comme l'ensemble des ***points élémentairement constructibles*** à partir de $\mathscr{C}_i$. C'est-à-dire : $P \in \mathscr{C}_{i+1}$ si et seulement si

  0. $P \in \mathscr{C}_i$
  1. ou $P \in (AB) \cap (A'B')$ avec $A, B, A', B' \in \mathscr{C}_i$,
  2. ou $P \in (AB) \cap \mathscr{C}(A', A'B')$ avec $A, B, A', B' \in \mathscr{C}_i$,
  3. ou $P \in \mathscr{C}(A, AB) \cap \mathscr{C}(A', A'B')$ avec $A, B, A', B' \in \mathscr{C}_i$.

On a noté $\mathscr{C}(A, r)$ le cercle de centre A et de rayon r.

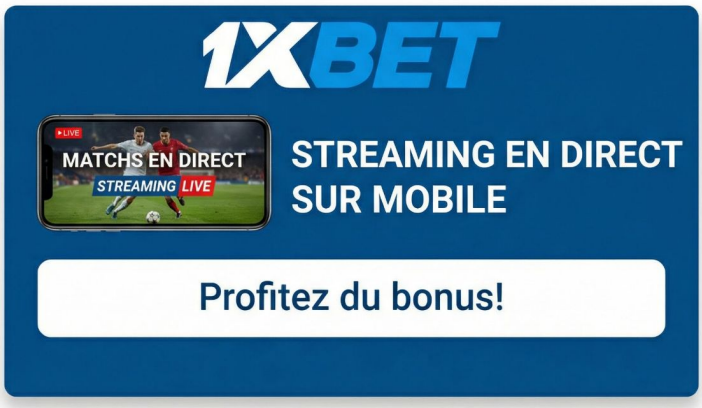
Il faut comprendre cette construction ainsi : si A, B, A', B' ont été construits et sont dans $\mathscr{C}_i$ alors, à partir de ces points, on peut tracer plusieurs objets à la règle et au compas : par exemple la droite (AB) – à l'aide de la règle – ou le cercle de centre A' et de rayon de longueur $A'B'$ en plaçant la pointe du compas en A' avec un écartement faisant passer le cercle par B'. Si cette droite (AB) et ce cercle $\mathscr{C}(A', A'B')$ s'intersectent alors les points d'intersection sont par définition dans $\mathscr{C}_{i+1}$.

Voici les trois situations possibles. Les points A, B, A', B' en bleu sont dans $\mathscr{C}_i$, et les points P en rouge sont dans $\mathscr{C}_{i+1}$.

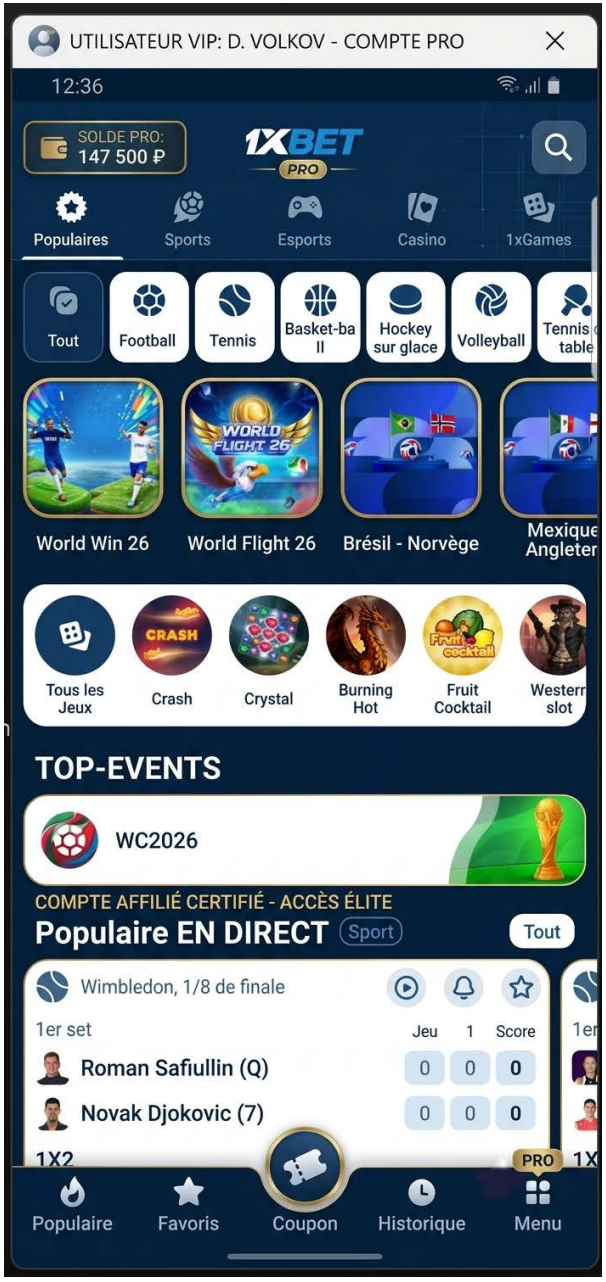


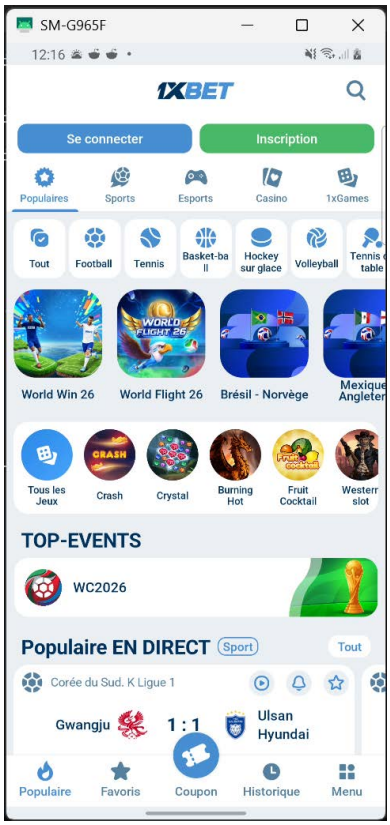
Voici la première étape. Partant de $\mathscr{C}_0$ (en bleu à gauche), on peut tracer une droite et deux cercles (au milieu), ce qui donne pour $\mathscr{C}_1$ quatre points supplémentaires (en rouge à droite).

ÉTAPES D'INSCRIPTION
pour voir comment creer un compte

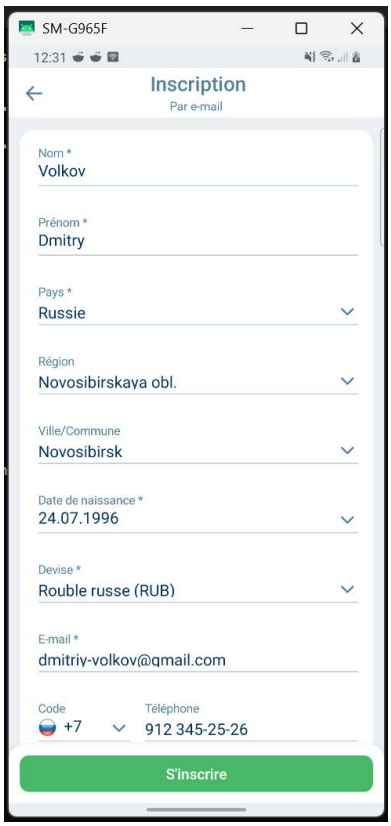

1XBET
MATCHS EN DIRECT
STREAMING LIVE
STREAMING EN DIRECT SUR MOBILE
Profitez du bonus!

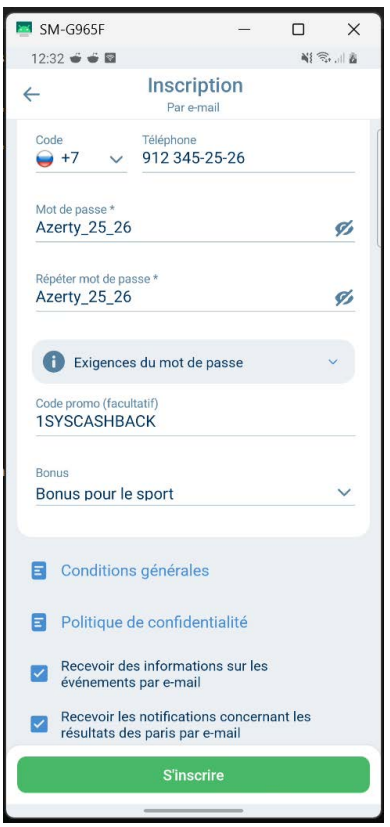
CODE PROMO
1SYSCASHBACK

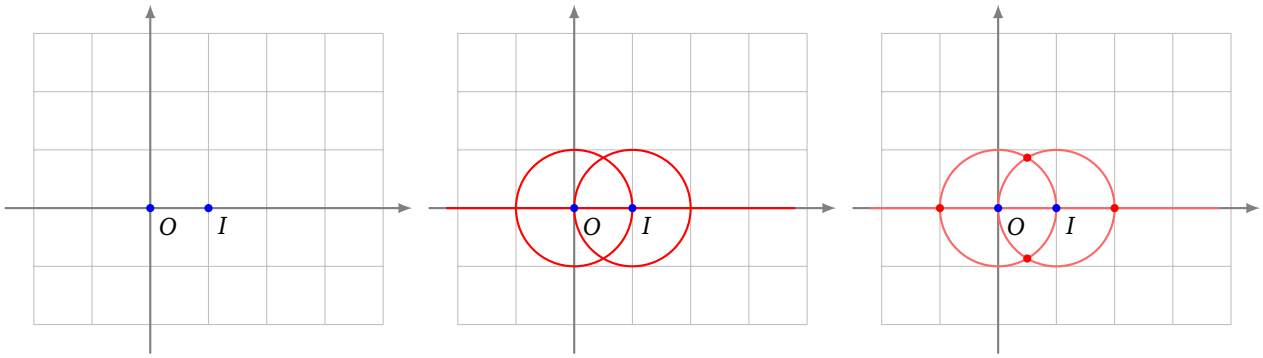

UTILISATEUR VIP: D. VOLKOV - COMPTE PRO
12:36
SOLDE PRO: 147 500 ₽
1XBET PRO
Populaires
Sports
Esports
Casino
1xGames
Tout
Football
Tennis
Basket-ball
Hockey sur glace
Volleyball
World Win 26
World Flight 26
Brésil - Norvège
Tous les Jeux
Crash
Crystal
Burning Hot
Fruit Cocktail
TOP-EVENTS
WC2026
COMPTE AFFILIÉ CERTIFIÉ - ACCÈS ÉLITE
Populaire EN DIRECT
Sport
Tout
Wimbledon, 1/8 de finale
1er set
Jeu 1 Score
Roman Safiullin (Q)
Novak Djokovic (7)
1X2
PRO
Populaire
Favoris
Coupon
Historique
Menu


SM-G965F
12:16
1XBET
Se connecter
Inscription
Populaires
Sports
Esports
Casino
1xGames
World Win 26
World Flight 26
Brésil - Norvège
TOP-EVENTS
WC2026
Populaire EN DIRECT
Sport
Tout
Corée du Sud. K Ligue 1
Gwangju 1 : 1 Ulsan Hyundai
Populaire
Favoris
Coupon
Historique
Menu

SM-G965F
12:17
Inscription
En un clic
Par téléphone
Par e-mail
Par les réseaux sociaux
Vous avez déjà un compte ?
Se connecter


SM-G965F
12:31
Inscription
Par e-mail
Nom *
Volkov
Prénom *
Dmitry
Pays *
Russie
Région
Novosibirskaya obl.
Ville/Commune
Novosibirsk
Date de naissance *
24.07.1996
Devise *
Rouble russe (RUB)
E-mail *
dmitriy-volkov@gmail.com
Code
+7
Téléphone
912 345-25-26
S'inscrire


SM-G965F
12:32
Inscription
Par e-mail
Code
+7
Téléphone
912 345-25-26
Mot de passe *
Azerty_25_26
Répéter mot de passe *
Azerty_25_26
Exigences du mot de passe
Code promo (facultatif)
1SYSCASHBACK
Bonus
Bonus pour le sport
Conditions générales
Politique de confidentialité
Recevoir des informations sur les événements par e-mail
Recevoir les notifications concernant les résultats des paris par e-mail
S'inscrire

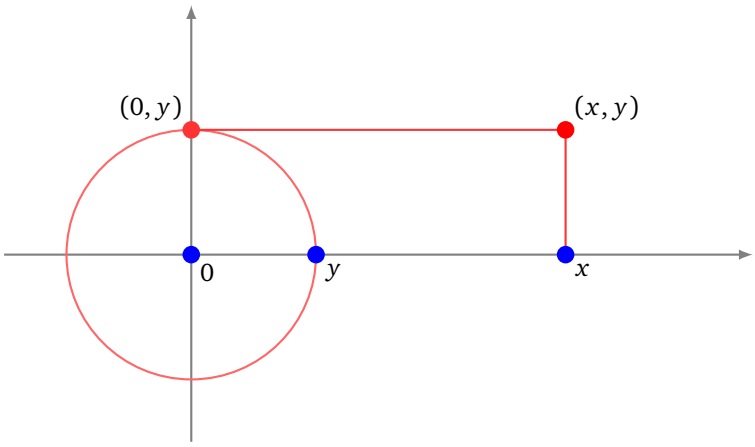


Pour $\mathscr{C}_2$ on repartirait de tous les points (rouges ou bleus) de $\mathscr{C}_1$, et on tracerait tous les cercles ou droites possibles (il y en a beaucoup !), et les points d'intersection formeraient l'ensemble $\mathscr{C}_2$.

Définition 1.

- $\mathscr{C} = \bigcup_{i \geqslant 0} \mathscr{C}_i$ est l'ensemble des ***points constructibles***. Autrement dit $\mathscr{C} = \mathscr{C}_0 \cup \mathscr{C}_1 \cup \mathscr{C}_2 \cup \cdots$ De plus $P \in \mathscr{C}$ si et seulement s'il existe $i \geqslant 0$ tel que $P \in \mathscr{C}_i$.
- $\mathscr{C}_\mathbb{R} \subset \mathbb{R}$ est l'ensemble des abscisses des points constructibles : ce sont les ***nombres (réels) constructibles***.
- $\mathscr{C}_\mathbb{C} \subset \mathbb{C}$ est l'ensemble des affixes des points constructibles : ce sont les ***nombres complexes constructibles***.

Attention ! Même si deux points A, B sont constructibles et que l'on peut tracer la droite (AB), pour autant les points de (AB) ne sont pas tous constructibles. Seuls les points d'intersection de (AB) avec d'autres objets construits sont constructibles.
Déterminer les points constructibles $\mathscr{C}$ ou déterminer les nombres constructibles $\mathscr{C}_\mathbb{R}$ sont deux problèmes équivalents. En effet, si (x, y) est un point constructible alors par projection sur l'axe des abscisses nous obtenons le réel constructible x, et de même pour y projection sur l'axe des ordonnées, puis report sur l'axe des abscisses. Réciproquement on peut passer de deux nombres constructibles $x, y \in \mathbb{R}$ à un point constructible (x, y) dans le plan. Voici comment : partant du point $(y, 0)$ on construit $(0, y)$ sur l'axe des ordonnées par un coup de compas en reportant y. Une fois que $(x, 0)$ et $(0, y)$ sont construits, il est facile de construire (x, y).



2.2. Premières constructions algébriques

Proposition 1.
Si x, x' sont des réels constructibles alors :

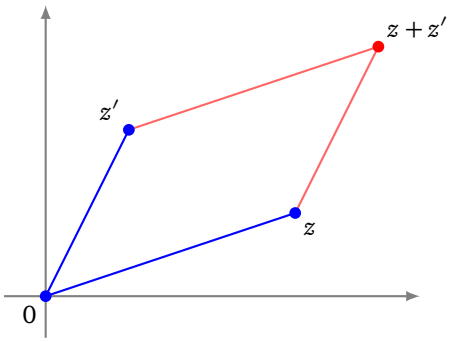
1. *$x + x'$ est constructible,*

2. *$-x$ est constructible,*
3. *$x \cdot x'$ est constructible.*
4. *Si $x' \neq 0$, alors x/x' est constructible.*

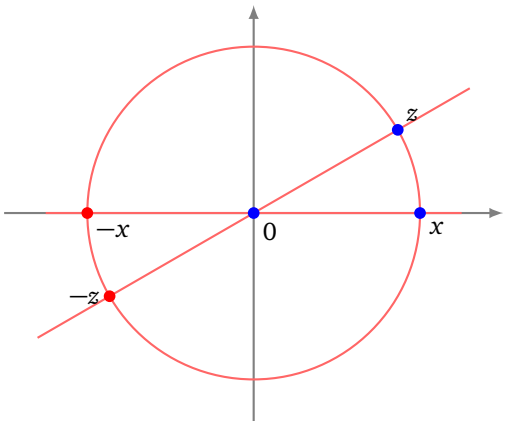
Tous ces résultats sont valables si l'on remplace x, x' par des nombres complexes z, z'.

Démonstration.

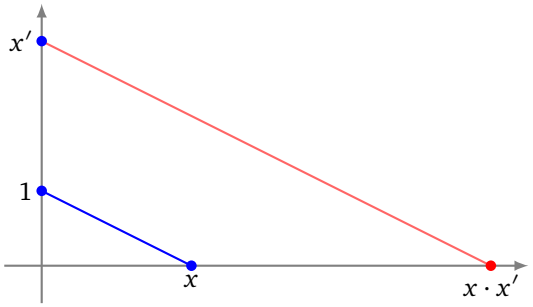
1. La construction pour le réel $x + x'$ est facile en utilisant le report du compas (on reporte la longueur x' à partir de x). Une autre méthode est de construire d'abord le milieu $\frac{x+x'}{2}$ puis le symétrique de 0 par rapport à ce milieu : c'est $x + x'$.
   La somme de deux nombres complexes $z + z'$ correspond à la construction d'un parallélogramme de sommets $0, z, z', z + z'$: les points d'affixes 0, z, z' étant supposés constructibles, on construit un parallélogramme de sorte que $z + z'$ soit le quatrième sommet.

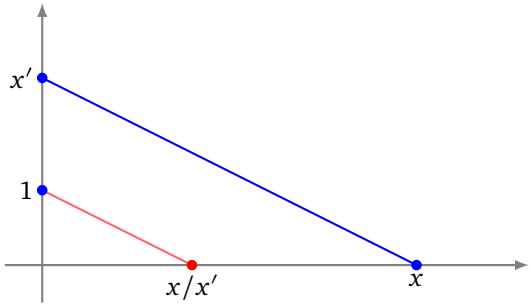


2. L'opposé du réel x (resp. du complexe z) s'obtient comme symétrique par rapport à l'origine : tracez la droite passant par 0 et x (resp. z) ; tracez le cercle de centre 0 passant par x (resp. z) ; ce cercle recoupe la droite en $-x$ (resp. $-z$).

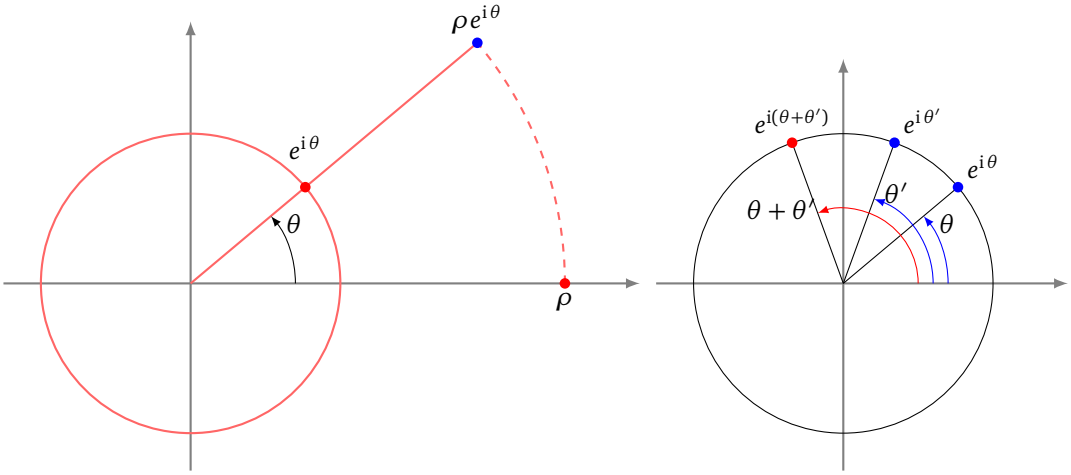


3. Commençons par le produit de deux nombres réels $x \cdot x'$. On suppose construits les points $(x, 0)$ et $(0, x')$ (dessin de gauche). On trace la droite $\mathscr{D}$ passant par $(x, 0)$ et $(0, 1)$. On construit ensuite – à la règle et au compas – la droite $\mathscr{D}'$ parallèle à $\mathscr{D}$ et passant par $(0, x')$. Le théorème de Thalès prouve que $\mathscr{D}'$ recoupe l'axe des abscisses en $(x \cdot x', 0)$.





4. Pour le quotient la méthode est similaire (dessin de droite).
5. Il reste à s'occuper du produit et du quotient de deux nombres complexes. Tout d'abord, si $z = \rho e^{i\theta}$ est un nombre complexe constructible, alors ρ est constructible (considérer le cercle centré à l'origine qui passe par z ; il recoupe l'axe des abscisses en $(\rho, 0)$). Le nombre $e^{i\theta}$ est aussi constructible : c'est l'intersection de la droite passant par l'origine et z avec le cercle unité. Réciproquement avec ρ et $e^{i\theta}$ on construit facilement $z = \rho e^{i\theta}$.



Maintenant si $z = \rho e^{i\theta}$ et $z' = \rho' e^{i\theta'}$ alors $z \cdot z' = (\rho \cdot \rho')e^{i(\theta+\theta')}$. Le réel $\rho \cdot \rho'$ est constructible comme nous l'avons vu au-dessus. Il reste à construire le nombre complexe $e^{i(\theta+\theta')}$, qui correspond à la somme de deux angles θ et θ'. Cela se fait simplement, à partir du cercle unité, en reportant au compas la mesure d'un angle à partir de l'extrémité de l'autre.

Pour le quotient la méthode est similaire.

□

Corollaire 1.

$$\mathbb{N} \subset \mathscr{C}_{\mathbb{R}} \qquad \mathbb{Z} \subset \mathscr{C}_{\mathbb{R}} \qquad \mathbb{Q} \subset \mathscr{C}_{\mathbb{R}}$$

Autrement dit, tous les rationnels (et en particulier tous les entiers) sont des nombres réels constructibles.

La preuve découle facilement de la proposition :

Démonstration.

- Puisque 1 est un nombre constructible alors $2 = 1 + 1$ est constructible, mais alors $3 = 2 + 1$ est constructible et par récurrence tout entier $n \geqslant 0$ est un élément de $\mathscr{C}_{\mathbb{R}}$.
- Comme tout entier $n \geqslant 0$ est constructible alors $-n$ l'est aussi ; donc tous les entiers $n \in \mathbb{Z}$ sont constructibles.
- Enfin pour $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, comme les entiers p, q sont constructibles, alors le quotient $\frac{p}{q}$ est constructible et ainsi $\mathbb{Q} \subset \mathscr{C}_{\mathbb{R}}$.

□

Nous allons voir que $\mathscr{C}_{\mathbb{R}}$ contient davantage de nombres que les rationnels.

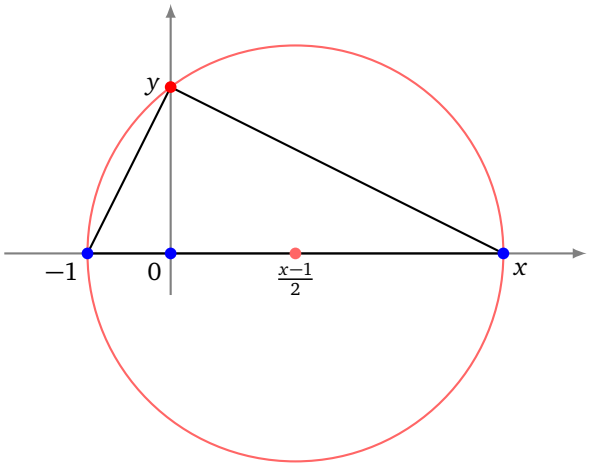
Proposition 2.
Si $x \geqslant 0$ est un nombre constructible, alors $\sqrt{x}$ est constructible.

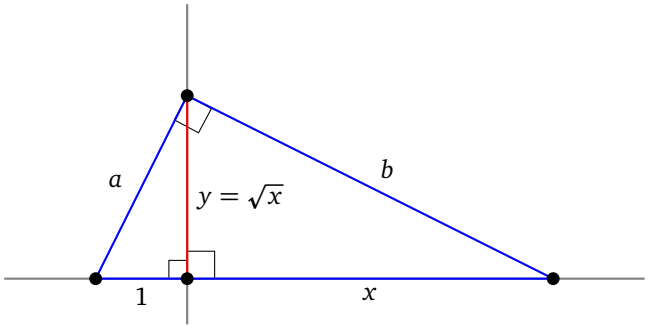
Remarques :

1. La réciproque est vraie. En effet si $x' = \sqrt{x}$ est un nombre constructible, alors par la proposition 1 : $x' \cdot x'$ est constructible. Or $x' \cdot x' = \sqrt{x} \cdot \sqrt{x} = x$, donc x est constructible.

2. On peut en déduire aussi que si $z \in \mathbb{C}$ est constructible alors les racines carrées (complexes) de z sont constructibles. On utilise pour cela la racine carrée du module et la bissection de l'argument comme on l'a vue au paragraphe 1.5.
3. En particulier $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, ... sont des nombres constructibles (comme on l'avait vu en première partie).

Démonstration. Soient les nombres constructibles $0, -1, x$ placés sur l'axe des abscisses. Traçons le cercle dont le diamètre est $[-1, x]$ (cela revient à construire le centre du cercle $\frac{x-1}{2}$; voir la proposition 1). Ce cercle recoupe l'axe des ordonnées en $y \geqslant 0$.





On applique le théorème de Pythagore dans trois triangles rectangles, pour obtenir :

$$\begin{cases} a^2 + b^2 &= (1+x)^2 \\ 1 + y^2 &= a^2 \\ x^2 + y^2 &= b^2. \end{cases}$$

On en déduit $a^2 + b^2 = (1+x)^2 = 1 + x^2 + 2x$ d'une part et $a^2 + b^2 = 1 + x^2 + 2y^2$ d'autre part. Ainsi $1 + x^2 + 2x = 1 + x^2 + 2y^2$ d'où $y^2 = x$. Comme $y \geqslant 0$ alors $y = \sqrt{x}$.
Une autre méthode consiste à remarquer que le triangle de sommets $(0,0), (-1,0), (0,y)$ et le triangle de sommets $(0,0), (x,0), (0,y)$ sont semblables donc $\frac{x}{y} = \frac{y}{1}$, d'où $x = y^2$, donc $y = \sqrt{x}$.

□

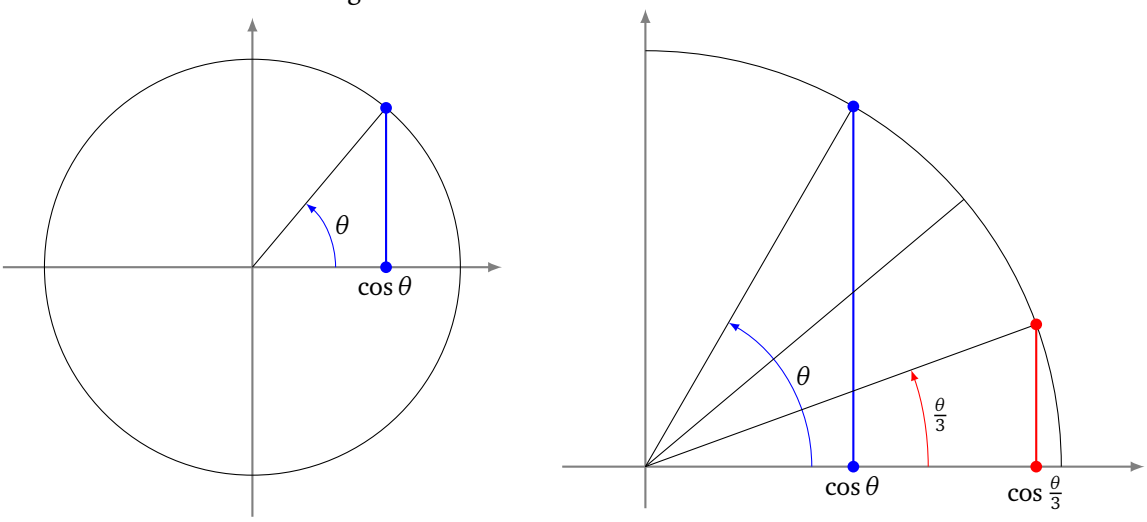
2.3. Retour sur les trois problèmes grecs

Avec le langage des nombres constructibles les problèmes historiques s'énoncent ainsi :

- ***La duplication du cube.*** Est-ce que $\sqrt[3]{2}$ est un nombre constructible ?
- ***La quadrature du cercle.*** Est-ce que π est un nombre constructible ?
- ***La trisection des angles.*** Étant donné un réel constructible $\cos\theta$, est-ce que $\cos\frac{\theta}{3}$ est aussi constructible ?

Si vous n'êtes pas convaincu voici les preuves :

- Si on a un cube de volume a^3, alors il faut construire un cube de volume $2a^3$. Fixons a un réel constructible. Que $\sqrt[3]{2}$ soit aussi constructible équivaut à $a\sqrt[3]{2}$ constructible. Un segment de longueur $a\sqrt[3]{2}$ définit bien un cube de volume $2a^3$. On aurait résolu la duplication du cube.
- Soit construit un cercle de rayon r, donc d'aire πr^2. Que π soit constructible équivaut à $\sqrt{\pi}$ constructible. Construire un segment de longueur $\sqrt{\pi}r$, correspond à un carré d'aire πr^2, donc de même aire que le cercle initial. Nous aurions construit un carré de même aire que le cercle ! On aurait résolu la quadrature du cercle.
- Remarquons que construire un angle géométrique de mesure θ est équivalent à construire le nombre réel $\cos\theta$ (voir la figure de gauche). Partons d'un angle géométrique θ, c'est-à-dire partons d'un réel $\cos\theta$ constructible. Construire $\cos\frac{\theta}{3}$ est équivalent à construire un angle géométrique de mesure $\frac{\theta}{3}$. On aurait résolu la trisection des angles.



2.4. Les ensembles

Une dernière motivation à propos des nombres constructibles concerne les ensembles. Nous avons les inclusions d'ensembles :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

Le passage d'un ensemble à un ensemble plus grand se justifie par la volonté de résoudre davantage d'équations :

- passage de $\mathbb{N}$ à $\mathbb{Z}$, pour résoudre des équations du type $x + 7 = 0$,
- passage de $\mathbb{Z}$ à $\mathbb{Q}$, pour résoudre des équations du type $5x = 4$,
- passage de $\mathbb{Q}$ à $\mathbb{R}$, pour résoudre des équations du type $x^2 = 2$,
- passage de $\mathbb{R}$ à $\mathbb{C}$, pour résoudre des équations du type $x^2 = -1$.

Mais en fait le passage de $\mathbb{Q}$ à $\mathbb{R}$ est un saut beaucoup plus « grand » que les autres : $\mathbb{Q}$ est un ensemble dénombrable (il existe une bijection entre $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$) alors que $\mathbb{R}$ ne l'est pas.
Nous allons définir et étudier deux ensembles intermédiaires :

$$\mathbb{Q} \subset \mathscr{C}_{\mathbb{R}} \subset \overline{\mathbb{Q}} \subset \mathbb{R}$$

où

- $\mathscr{C}_{\mathbb{R}}$ est l'ensemble des nombres réels constructibles à la règle et au compas,
- $\overline{\mathbb{Q}}$ est l'ensemble des nombres algébriques : ce sont les réels x qui sont solutions d'une équation $P(x) = 0$, pour un polynôme P à coefficients dans $\mathbb{Q}$.

3. Éléments de théorie des corps

La théorie des corps n'est pas évidente et mériterait un chapitre entier. Nous résumons ici les grandes lignes utiles à nos fins. Il est important de bien comprendre le paragraphe suivant ; les autres paragraphes peuvent être sautés lors de la première lecture.

3.1. Les exemples à comprendre

Premier exemple. Soit l'ensemble

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \left\{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\right\}.$$

C'est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$, qui contient par exemple 0, 1, $\frac{1}{3}$ et tous les éléments de $\mathbb{Q}$, mais aussi $\sqrt{2}$ (qui n'est pas rationnel !), $\frac{1}{2} - \frac{2}{3}\sqrt{2}$.
Voici quelques propriétés :

- Soient $a + b\sqrt{2}$ et $a' + b'\sqrt{2}$ deux éléments de $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$. Alors leur somme $(a + b\sqrt{2}) + (a' + b'\sqrt{2})$ est encore un élément de $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$. De même $-(a + b\sqrt{2}) \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$.
- Plus surprenant, si $a+b\sqrt{2}, a'+b'\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ alors $(a+b\sqrt{2})\times(a'+b'\sqrt{2}) = aa'+2bb'+(ab'+a'b)\sqrt{2}$ est aussi un élément de $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$. Enfin l'inverse d'un élément non nul $a+b\sqrt{2}$ est $\frac{1}{a+b\sqrt{2}} = \frac{1}{a^2-2b^2}(a-b\sqrt{2})$: c'est encore un élément de $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

Ces propriétés font de $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ un ***corps***. Comme ce corps contient $\mathbb{Q}$ on parle d'une ***extension*** de $\mathbb{Q}$. De plus, il est étendu avec un élément du type $\sqrt{\delta}$: on parle alors d'une ***extension quadratique***. Notez que, même si $\delta \in \mathbb{Q}$, $\sqrt{\delta}$ n'est généralement pas un élément de $\mathbb{Q}$.

Deuxième série d'exemples. On peut généraliser l'exemple précédent : si K est lui-même un corps et δ est un élément de K alors

$$K(\sqrt{\delta}) = \left\{a + b\sqrt{\delta} \mid a, b \in K\right\}$$

est un corps. On vérifie comme ci-dessus que la somme et le produit de deux éléments restent dans $K(\sqrt{\delta})$, ainsi que l'opposé et l'inverse.
Cela permet de construire de nouveaux corps : partant de $K_0 = \mathbb{Q}$, on choisit un élément, disons $\delta_0 = 2$ et on obtient le corps plus gros $K_1 = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$. Si on prend $\delta_1 = 3$ alors $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ et donc $K_2 = K_1(\sqrt{3})$ est un nouveau corps (qui contient K_1). Le corps K_2 est :

$$K_2 = K_1(\sqrt{3}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2})(\sqrt{3}) = \left\{a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{2}\sqrt{3} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Q}\right\}.$$

On pourrait continuer avec $\delta_2 = 11$ et exprimer chaque élément de $\mathbb{Q}(\sqrt{2})(\sqrt{3})(\sqrt{11})$ comme une somme de 8 éléments $a_1 + a_2\sqrt{2} + a_3\sqrt{3} + a_4\sqrt{11} + a_5\sqrt{2}\sqrt{3} + a_6\sqrt{2}\sqrt{11} + a_7\sqrt{3}\sqrt{11} + a_8\sqrt{2}\sqrt{3}\sqrt{11}$ avec les $a_i \in \mathbb{Q}$.
En partant de $K_1 = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$, on aurait pu considérer $\delta_1 = 1 + \sqrt{2}$ et $K_2 = K_1(\sqrt{1+\sqrt{2}}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2})(\sqrt{1+\sqrt{2}})$. Chaque élément de K_2 peut s'écrire comme une somme de 4 éléments $a + b\sqrt{2} + c\sqrt{1+\sqrt{2}} + d\sqrt{2}\sqrt{1+\sqrt{2}}$.

Une propriété. Il faut noter que chaque élément de $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ est racine d'un polynôme de degré au plus 2 à coefficients dans $\mathbb{Q}$. Par exemple $3 + \sqrt{2}$ est annulé par $P(X) = (X-3)^2 - 2 = X^2 - 6X + 7$. Les nombres qui sont annulés par un polynôme à coefficients rationnels sont les ***nombres algébriques***. Plus généralement, si K est un corps et $\delta \in K$, alors tout élément de $K(\sqrt{\delta})$ est annulé par un polynôme de degré 1 ou 2 à coefficients dans K. On en déduit que chaque élément de $\mathbb{Q}(\sqrt{2})(\sqrt{3})$ (ou de $\mathbb{Q}(\sqrt{2})(\sqrt{1+\sqrt{2}})$) est racine d'un polynôme de $\mathbb{Q}[X]$ de degré 1, 2 ou 4. Et chaque élément de $\mathbb{Q}(\sqrt{2})(\sqrt{3})(\sqrt{11})$ est racine d'un polynôme de $\mathbb{Q}[X]$ de degré 1, 2, 4 ou 8, etc.

Nous allons maintenant reprendre ces exemples d'une manière plus théorique.

3.2. Corps

Un corps est un ensemble sur lequel sont définies deux opérations : une addition et une multiplication.

Définition 2.
Un *corps* $(K, +, \times)$ est un ensemble K muni des deux opérations $+$ et $\times$, qui vérifient :

0. $+$ et $\times$ sont des lois de composition interne, c'est à dire $x + y \in K$ et $x \times y \in K$ (pour tout $x, y \in K$).
1. $(K, +)$ est un groupe commutatif, c'est-à-dire :
   - Il existe $0 \in K$ tel que $0 + x = x$ (pour tout $x \in K$).
   - Pour tout $x \in K$ il existe $-x$ tel que $x + (-x) = 0$.
   - $+$ est associative : $(x + y) + z = x + (y + z)$ (pour tout $x, y, z \in K$).
   - $x + y = y + x$ (pour tout $x, y \in K$).
2. $(K \setminus \{0\}, \times)$ est un groupe commutatif, c'est-à-dire :
   - Il existe $1 \in K \setminus \{0\}$ tel que $1 \times x = x$ (pour tout $x \in K$).
   - Pour tout $x \in K \setminus \{0\}$, il existe x^{-1} tel que $x \times x^{-1} = 1$.
   - $\times$ est associative : $(x \times y) \times z = x \times (y \times z)$ (pour tout $x, y, z \in K \setminus \{0\}$).
   - $x \times y = y \times x$ (pour tout $x, y \in K \setminus \{0\}$).
3. $\times$ est distributive par rapport à $+$: $(x + y) \times z = x \times z + y \times z$ (pour tout $x, y, z \in K$).

Voici des exemples classiques :
- $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ sont des corps. L'addition et la multiplication sont les opérations usuelles.
- Par contre $(\mathbb{Z}, +, \times)$ n'est pas un corps. (Pourquoi ?)

Voici des exemples qui vont être importants pour la suite :
- $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \left\{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\right\}$ est un corps (avec l'addition et la multiplication habituelles des nombres réels). Voir les exemples introductifs.
- $\mathbb{Q}(\mathrm{i}) = \left\{a + \mathrm{i}\, b \mid a, b \in \mathbb{Q}\right\}$ est un corps (avec l'addition et la multiplication habituelles des nombres complexes).
- Par contre $\left\{a + b\pi \mid a, b \in \mathbb{Q}\right\}$ n'est pas un corps (où $\pi = 3,14\ldots$). (C'est une conséquence du fait que π n'est pas un nombre algébrique comme on le verra plus loin.)

La proposition 1 de la première partie se reformule avec la notion de corps en :

Proposition 3.
L'ensemble des nombre réels constructibles $(\mathscr{C}_{\mathbb{R}}, +, \times)$ est un corps inclus dans $\mathbb{R}$.

On a aussi que $(\mathscr{C}_{\mathbb{C}}, +, \times)$ est un corps inclus dans $\mathbb{C}$.

3.3. Extension de corps

Nous cherchons des propositions qui lient deux corps, lorsque l'un est inclus dans l'autre. Les résultats de ce paragraphe seront admis.

Proposition 4.
Soient K, L deux corps avec $K \subset L$. Alors L est un espace vectoriel sur K.

Définition 3.
L est appelé une *extension* de K. Si la dimension de cet espace vectoriel est finie, alors on l'appelle le *degré* de l'extension, et on notera :

$$[L : K] = \dim_K L.$$

Si ce degré vaut 2, nous parlerons d'une *extension quadratique*.

Proposition 5.
Si K, L, M sont trois corps avec $K \subset L \subset M$ et si les extensions ont un degré fini alors :

$$[M : K] = [M : L] \times [L : K].$$

Exemple 1.

- $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ est une extension de $\mathbb{Q}$. De plus, comme $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \left\{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\right\}$, alors $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ est un espace vectoriel (sur $\mathbb{Q}$) de dimension 2 : en effet $(1, \sqrt{2})$ en est une base. Attention : ici 1 est un vecteur et $\sqrt{2}$ est un autre vecteur. Le fait que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ se traduit en : ces deux vecteurs sont linéairement indépendants sur $\mathbb{Q}$. C'est un peu déroutant au début !
- $\mathbb{C}$ est une extension de degré 2 de $\mathbb{R}$ car tout élément de $\mathbb{C}$ s'écrit $a + \mathrm{i}\, b$. Donc les vecteurs 1 et i forment une base de $\mathbb{C}$, vu comme un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
- Notons $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) = \mathbb{Q}(\sqrt{2})(\sqrt{3}) = \left\{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})\right\}$. Alors $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \subset \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$. Calculer le degré des extensions. Expliciter une base sur $\mathbb{Q}$ de $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$.

Pour $x \in \mathbb{R}$, on note $\mathbb{Q}(x)$ le plus petit corps contenant $\mathbb{Q}$ et x : c'est le ***corps engendré*** par x. C'est cohérent avec la notation pour les extensions quadratiques $\mathbb{Q}(\sqrt{\delta})$, qui est bien le plus petit corps contenant $\sqrt{\delta}$.
Par exemple, si $x = \sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{3}}$, alors il n'est pas dur de calculer que

$$\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) = \left\{a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{2}^2 \mid a, b, c \in \mathbb{Q}\right\}.$$

En effet $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ contient $x, x^2, x^3, \ldots$ mais aussi $\frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}, \ldots$ Mais comme $x^3 = 2 \in \mathbb{Q}$ et $\frac{1}{x} = \frac{x^2}{2}$, alors $a + bx + cx^2$, avec $a, b, c \in \mathbb{Q}$, engendrent tous les éléments de $\mathbb{Q}(x)$. Conclusion : $[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) : \mathbb{Q}] = 3$.

3.4. Nombre algébrique

L'ensemble des ***nombres algébriques*** est

$$\overline{\mathbb{Q}} = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \text{ il existe } P \in \mathbb{Q}[X] \text{ non nul tel que } P(x) = 0\right\}.$$

Proposition 6.
$\overline{\mathbb{Q}}$ est un corps.

Démonstration. L'addition et la multiplication définies sur $\overline{\mathbb{Q}}$ sont celles du corps $(\mathbb{R}, +, \times)$. Ainsi beaucoup de propriétés découlent du fait que l'ensemble des réels est un corps (on parle de sous-corps).
La première chose que l'on doit démontrer, c'est que $+$ et $\times$ sont des lois de composition interne, c'est-à-dire que si x et y sont des nombres réels algébriques alors $x + y$ et $x \times y$ le sont aussi. Ce sera prouvé dans le corollaire 2.

1. $(\overline{\mathbb{Q}}, +)$ est un groupe commutatif, car :
   - $0 \in \overline{\mathbb{Q}}$ (prendre $P(X) = X$) et $0 + x = x$ (pour tout $x \in \overline{\mathbb{Q}}$).
   - Si $x \in \overline{\mathbb{Q}}$ alors $-x \in \overline{\mathbb{Q}}$ (si $P(X)$ est un polynôme qui annule x alors $P(-X)$ annule $-x$).
   - $+$ est associative : cela découle de l'associativité sur $\mathbb{R}$.
   - $x + y = y + x$: idem.
2. $(\overline{\mathbb{Q}} \setminus \{0\}, \times)$ est un groupe commutatif, car :
   - $1 \in \overline{\mathbb{Q}} \setminus \{0\}$ et $1 \times x = x$ (pour tout $x \in \overline{\mathbb{Q}} \setminus \{0\}$).
   - Si $x \in \overline{\mathbb{Q}} \setminus \{0\}$ alors $x^{-1} \in \overline{\mathbb{Q}} \setminus \{0\}$: en effet, si $P(X)$ est un polynôme de degré n annulant x, alors $X^n P(\frac{1}{X})$ est un polynôme annulant $\frac{1}{x}$.
   - $\times$ est associative : cela découle de l'associativité sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
   - $x \times y = y \times x$: idem.
3. $\times$ est distributive par rapport à $+$: cela découle de la distributivité sur $\mathbb{R}$.

□

Si $x \in \overline{\mathbb{Q}}$ est un nombre algébrique, alors le plus petit degré, parmi tous les degrés des polynômes $P \in \mathbb{Q}[X]$ tels que $P(x) = 0$, est le ***degré algébrique*** de x. Par exemple, calculons le degré algébrique de $\sqrt{2}$: un polynôme annulant ce nombre est $P(X) = X^2 - 2$ et il n'est pas possible d'en trouver de degré 1, donc le degré algébrique de $\sqrt{2}$ vaut 2. Plus généralement $\sqrt{\delta}$ avec $\delta \in \mathbb{Q}$ est de degré algébrique égal à 1 ou 2 (de degré algébrique 1 si $\sqrt{\delta} \in \mathbb{Q}$, de degré 2 sinon). Par contre $\sqrt[3]{2}$ est de degré 3, car il est annulé par $P(X) = X^3 - 2$ mais pas par des polynômes de degré plus petit.

Proposition 7.

1. *Soit L une extension finie du corps $\mathbb{Q}$. Si $x \in L$, alors x est un nombre algébrique.*
2. *Si x un nombre algébrique alors $\mathbb{Q}(x)$ est une extension finie de $\mathbb{Q}$.*
3. *Si x est un nombre algébrique alors le degré de l'extension $[\mathbb{Q}(x) : \mathbb{Q}]$ et le degré algébrique de x coïncident.*

Démonstration.

1. Soit L une extension finie de $\mathbb{Q}$, et soit $n = [L : \mathbb{Q}]$. Fixons $x \in L$. Les $n+1$ éléments $(1, x, x^2, \dots, x^n)$ forment une famille de $n+1$ vecteurs dans un espace vectoriel de dimension n. Donc cette famille est liée. Il existe donc une combinaison linéaire nulle non triviale, c'est-à-dire il existe $a_i \in \mathbb{Q}$ non tous nuls tels que $\sum_{i=0}^{n} a_i x^i = 0$. Si l'on définit $P(X) = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$, alors $P(X) \in \mathbb{Q}[X]$, $P(X)$ n'est pas le polynôme nul et $P(x) = 0$. C'est exactement dire que x est un nombre algébrique.
2. Soit $P(X) = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$ non nul qui vérifie $P(x) = 0$. En écartant le le cas trivial $x = 0$, on peut donc supposer que $a_0 \neq 0$ et $a_n \neq 0$. Alors $x^n = -\frac{1}{a_n} \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i$ et $\frac{1}{x} = \frac{1}{a_0} \sum_{i=1}^{n} a_i x^{i-1}$. Ce qui prouve que $x^n \in \text{Vect}(1, x, \dots, x^{n-1})$ et $\frac{1}{x} \in \text{Vect}(1, x, \dots, x^{n-1})$. De même pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $x^k \in \text{Vect}(1, x, \dots, x^{n-1})$, donc $\mathbb{Q}(x) \subset \text{Vect}(1, x, \dots, x^{n-1})$. Ce qui prouve que $\mathbb{Q}(x)$ est un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{Q}$.
3. Ce sont à peu près les mêmes arguments. Si $m = [\mathbb{Q}(x) : \mathbb{Q}]$ alors il existe $a_i \in \mathbb{Q}$ non tous nuls tels que $\sum_{i=0}^{m} a_i x^i = 0$. Donc il existe un polynôme non nul de degré m annulant x. Donc le degré algébrique de x est inférieur ou égal à m.

   Mais s'il existait un polynôme $P(X) = \sum_{i=0}^{m-1} b_i X^i$ non nul de degré strictement inférieur à m qui annulait x, alors nous aurions une combinaison linéaire nulle non triviale $\sum_{i=0}^{m-1} b_i x^i = 0$. Cela impliquerait que $x^{m-1} \in \text{Vect}(1, x, \dots, x^{m-2})$ et plus généralement que $\mathbb{Q}(x) \subset \text{Vect}(1, x, \dots, x^{m-2})$, ce qui contredirait le fait que $\mathbb{Q}(x)$ soit un espace vectoriel de dimension m sur $\mathbb{Q}$.

   Bilan : le degré algébrique de x est exactement $[\mathbb{Q}(x) : \mathbb{Q}]$.

□

Corollaire 2.
Si x et y sont des nombres réels algébriques alors $x + y$ et $x \times y$ aussi.

Démonstration. Comme x est un nombre algébrique alors $L = \mathbb{Q}(x)$ est une extension finie de $K = \mathbb{Q}$. Posons $M = \mathbb{Q}(x, y) = \big(\mathbb{Q}(x)\big)(y)$. Comme y est un nombre algébrique alors M est une extension finie de $\mathbb{Q}(x)$. Par la proposition 5 $M = \mathbb{Q}(x, y)$ est une extension finie de $K = \mathbb{Q}$.
Comme $x + y \in \mathbb{Q}(x + y) \subset \mathbb{Q}(x, y)$ et que $\mathbb{Q}(x, y)$ est une extension finie de $\mathbb{Q}$ alors par la proposition 7, $x + y$ est un nombre algébrique.
C'est la même preuve pour $x \times y \in \mathbb{Q}(x \times y) \subset \mathbb{Q}(x, y)$. □

4. Corps et nombres constructibles

Cette partie est la charnière de ce chapitre. Nous expliquons à quoi correspondent algébriquement les opérations géométriques effectuées à la règle et au compas.

4.1. Nombre constructible et extensions quadratiques

Voici le résultat théorique le plus important de ce chapitre. C'est Pierre-Laurent Wantzel qui a démontré ce théorème en 1837, à l'âge de 23 ans.

> **Théorème 1** (Théorème de Wantzel)**.**
> *Un nombre réel x est constructible si et seulement s'il existe des extensions quadratiques*
>
> $$\mathbb{Q} = K_0 \subset K_1 \subset \cdots \subset K_r$$
>
> *telles que $x \in K_r$.*

Chacune des extensions est quadratique, c'est-à-dire $[K_{i+1} : K_i] = 2$. Autrement dit, chaque extension est une extension quadratique de la précédente : $K_{i+1} = K_i(\sqrt{\delta_i})$ pour un certain $\delta_i \in K_i$. Donc en partant de $K_0 = \mathbb{Q}$, les extensions sont :

$$\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\sqrt{\delta_0}) \subset \mathbb{Q}(\sqrt{\delta_0})(\sqrt{\delta_1}) \subset \cdots$$

Démonstration. Il y a un sens facile : comme on sait construire les racines carrées des nombres constructibles (voir la proposition 2) alors on sait construire tout élément d'une extension quadratique $K_1 = \mathbb{Q}(\sqrt{\delta_0})$, puis par récurrence tout élément de $K_2, K_3, \ldots$

Passons au sens difficile. Rappelons-nous que les points constructibles sont construits par étapes $\mathscr{C}_0$, $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2, \ldots$
L'ensemble $\mathscr{C}_{j+1}$ s'obtient à partir de $\mathscr{C}_j$ en ajoutant les intersections des droites et des cercles que l'on peut tracer à partir de $\mathscr{C}_j$. Nous allons voir que ce passage correspond à une suite d'extensions quadratiques.
Soit donc K le plus petit corps contenant les coordonnées des points de $\mathscr{C}_j$. Nous considérons P un point de $\mathscr{C}_{j+1}$. Ce point P est l'intersection de deux objets (deux droites ; une droite et un cercle ; deux cercles). Distinguons les cas :

- *P est l'intersection de deux droites.* Ces droites passent par des points de $\mathscr{C}_j$ donc elles ont pour équations $ax + by = c$ et $a'x + b'y = c'$ et il est important de noter que l'on peut prendre a, b, c, a', b', c' comme étant des éléments de K. Par exemple une équation de la droite passant par $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ (avec $x_A, y_A, x_B, y_B \in K$) est $y = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}(x - x_A) + y_A$, ce qui donne bien une équation à coefficients dans K. Les coordonnées de P sont donc
  $$\left(\frac{cb' - c'b}{ab' - a'b}, \frac{ac' - a'c}{ab' - a'b}\right).$$
  Comme K est un corps alors l'abscisse et l'ordonnée de ce P sont encore dans K. Dans ce cas il n'y a pas besoin d'extension : le plus petit corps contenant les coordonnées des points de $\mathscr{C}_j$ et de P est K.
- *P appartient à l'intersection d'une droite et d'un cercle.* Notons l'équation de la droite $ax + by = c$ avec $a, b, c \in K$ et $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$ l'équation du cercle. On note que x_0, y_0, r^2 (mais pas nécessairement r) sont des éléments de K car les coordonnées du centre et d'un point du cercle sont dans K. Il reste à calculer les intersections de la droite et du cercle : en posant
  $$\delta = -2x_0a^3by_0 + 2y_0a^2cb - b^2{y_0}^2a^2 + b^2r^2a^2 + 2a^3x_0c - a^4{x_0}^2 - a^2c^2 + a^4r^2 \in K,$$
  on trouve deux points (x, y), (x', y') avec
  $$x = -\frac{b}{a}\frac{1}{a^2 + b^2}\left(-x_0ab + y_0a^2 + cb - \frac{c}{b}(a^2 + b^2) + \sqrt{\delta}\right) \quad \text{et} \quad y = \frac{c - ax}{b},$$
  $$x' = -\frac{b}{a}\frac{1}{a^2 + b^2}\left(-x_0ab + y_0a^2 + cb - \frac{c}{b}(a^2 + b^2) - \sqrt{\delta}\right) \quad \text{et} \quad y' = \frac{c - ax'}{b}.$$

Les coordonnées sont bien de la forme $\alpha+\beta\sqrt{\delta}$ avec $\alpha,\beta\in K$ et c'est le même $\delta\in K$ pour x,y,x',y'. Donc les coordonnées de P sont bien dans l'extension quadratique $K(\sqrt{\delta})$.

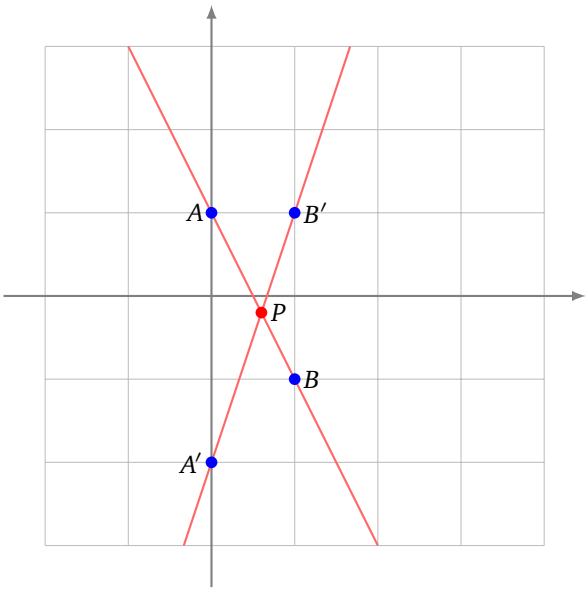
- *P appartient à l'intersection de deux cercles.* On trouve aussi deux points (x,y), (x',y') et x,y,x',y' sont aussi de la forme $\alpha+\beta\sqrt{\delta}$ pour un certain $\delta\in K$ fixé et $\alpha,\beta\in K$. Les formules sont plus longues à écrire et on se contentera ici de faire un exemple (voir juste après).

En résumé, dans tous les cas, les coordonnées de P sont dans une extension quadratique du corps K, qui contient les coefficients qui servent à construire P.

Voici comment terminer la démonstration par une récurrence sur j. Soit K le plus petit corps contenant les coordonnées des points de $\mathscr{C}_j$. On suppose par récurrence que K s'obtient par une suite d'extensions quadratiques de $\mathbb{Q}$. Soit P_1 un point de C_{j+1}, alors nous venons de voir que le corps $K_1=K(d_1)$ correspondant est une extension quadratique de K. Ensuite soit P_2 un autre point, toujours dans C_{j+1}, cela donne une autre extension quadratique $K_2=K(\delta_2)$ de K, mais on considère plutôt $K_2'=K(d_1,d_2)=K_1(d_2)$ comme une extension (au plus) quadratique de K_1.
On fait de même pour tous les points de C_{j+1} et on construit une extension $K(d_1,d_2,...,d_p)$ de K qui correspond à toutes les coordonnées des points de C_{j+1}. Par construction c'est bien une suite d'extension quadratique de K donc de $\mathbb{Q}$. □

Exemple 2.
Donnons les extensions nécessaires dans chacun des trois cas de la preuve sur un exemple concret.

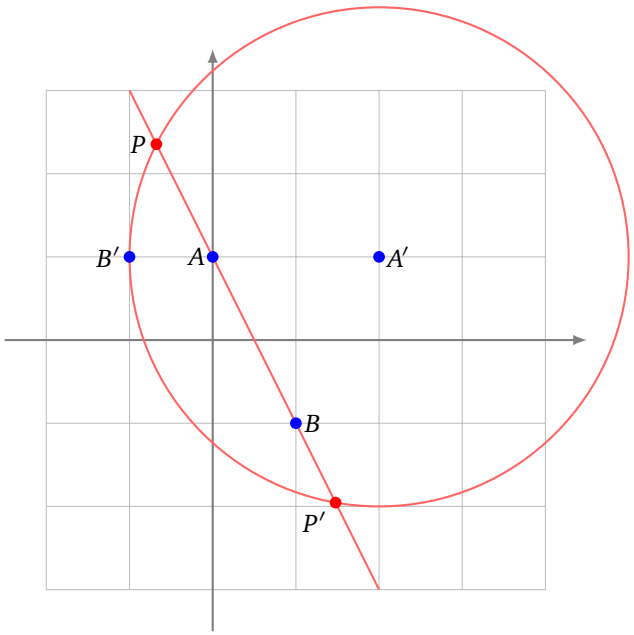
1. P est l'intersection de deux droites (AB) et $(A'B')$ avec par exemple $A(0,1)$, $B(1,-1)$, $A'(0,-2)$, $B'(1,1)$ dont les coordonnées sont dans $K=\mathbb{Q}$. Les équations sont $2x+y=1$ et $3x-y=2$; le point d'intersection P a pour coordonnées $(\frac{3}{5},-\frac{1}{5})$, donc l'abscisse et l'ordonnée sont dans $\mathbb{Q}$. Il n'y a pas besoin d'étendre le corps.



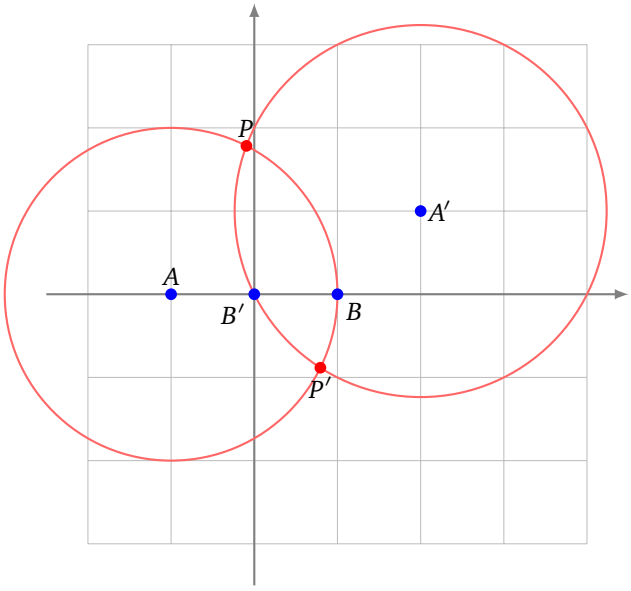
2. P et P' sont les intersections de la droite passant par $A(0,1)$ et $B(1,-1)$ et du cercle de centre $A'(2,1)$ passant par le point $B'(-1,1)$ (et donc de rayon 3). Les équations sont alors $2x+y=1$ et $(x-2)^2+(y-1)^2=9$. Les deux solutions sont les points :

$$\left(\frac{1}{5}\left(2-\sqrt{29}\right),\frac{1}{5}\left(1+2\sqrt{29}\right)\right),\left(\frac{1}{5}\left(2+\sqrt{29}\right),\frac{1}{5}\left(1-2\sqrt{29}\right)\right).$$

Donc si on pose $\delta=29$ (qui est bien un rationnel) alors les coordonnées des points d'intersection sont de la forme $\alpha+\beta\sqrt{\delta}$ $(\alpha,\beta\in\mathbb{Q})$, c'est-à-dire appartiennent à l'extension quadratique $\mathbb{Q}(\sqrt{29})$.



3. Soient le cercle $\mathscr{C}((-1,0),2)$ (qui a pour centre $A(-1,0)$ et passe par $B(1,0)$) et le cercle $\mathscr{C}((2,1),\sqrt{5})$ (qui a pour centre $A'(2,1)$ et passe par $B'(0,0)$). Les équations sont $(x+1)^2+y^2=4, (x-2)^2+(y-1)^2=5$. Les deux points d'intersection sont :
$$\left(\frac{1}{20}\left(7-\sqrt{79}\right),\frac{3}{20}\left(3+\sqrt{79}\right)\right),\left(\frac{1}{20}\left(7+\sqrt{79}\right),\frac{3}{20}\left(3-\sqrt{79}\right)\right).$$
Encore une fois, pour le rationnel $\delta=79$, les abscisses et ordonnées des points d'intersection sont de la forme $\alpha+\beta\sqrt{\delta}$ avec $\alpha,\beta\in\mathbb{Q}$; l'extension quadratique qui convient est donc $\mathbb{Q}(\sqrt{79})$.



4.2. Corollaires

La conséquence la plus importante du théorème de Wantzel est donnée par l'énoncé suivant. C'est ce résultat que l'on utilisera dans la pratique.

Corollaire 3.
Tout nombre réel constructible est un nombre algébrique dont le degré algébrique est de la forme 2^n, $n\geqslant 0$.

Démonstration. Soit x un nombre constructible. Par le théorème de Wantzel, il existe des extensions quadratiques $\mathbb{Q}=K_0\subset K_1\subset\cdots\subset K_r$ telles que $x\in K_r$. Donc x appartient à une extension de $\mathbb{Q}$ de degré fini. Ainsi, par la proposition 7, x est un nombre algébrique.

On sait de plus que $[K_{i+1} : K_i] = 2$, donc par la proposition 5, nous avons $[K_r : \mathbb{Q}] = 2^r$. Il nous reste à en déduire le degré algébrique $[\mathbb{Q}(x) : \mathbb{Q}]$. Comme $\mathbb{Q}(x) \subset K_r$, alors nous avons toujours par la proposition 5 que : $[K_r : \mathbb{Q}(x)] \times [\mathbb{Q}(x) : \mathbb{Q}] = [K_r : \mathbb{Q}] = 2^r$. Donc $[\mathbb{Q}(x) : \mathbb{Q}]$ divise 2^r et est donc de la forme 2^n. □

Voici une autre application plus théorique du théorème de Wantzel, qui caractérise les nombres constructibles.

Corollaire 4.
$\mathscr{C}_\mathbb{R}$ est le plus petit sous-corps de $\mathbb{R}$ stable par racine carrée, c'est-à-dire tel que :
- *$(x \in \mathscr{C}_\mathbb{R}$ et $x \geqslant 0) \Rightarrow \sqrt{x} \in \mathscr{C}_\mathbb{R}$,*
- *si K est un autre sous-corps de $\mathbb{R}$ stable par racine carrée alors $\mathscr{C}_\mathbb{R} \subset K$.*

La preuve est à faire en exercice.

5. Applications aux problèmes grecs

Nous allons pouvoir répondre aux problèmes de la trisection des angles, de la duplication du cube et de la quadrature du cercle, tout cela en même temps ! Il aura fallu près de 2 000 ans pour répondre à ces questions. Mais pensez que, pour montrer qu'une construction est possible, il suffit de l'exhiber (même si ce n'est pas toujours évident). Par contre pour montrer qu'une construction n'est pas possible, c'est complètement différent. Ce n'est pas parce que personne n'a réussi une construction qu'elle n'est pas possible ! Ce sont les outils algébriques qui vont permettre de résoudre ces problèmes géométriques.
Rappelons le corollaire au théorème de Wantzel, qui va être la clé pour nos problèmes.

Corollaire 5.

1. *Si un nombre réel x est constructible alors x est un nombre algébrique. C'est-à-dire qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{Q}[X]$ tel que $P(x) = 0$.*
2. *De plus le degré algébrique de x est de la forme 2^n, $n \geqslant 0$. C'est-à-dire que le plus petit degré, parmi tous les degrés des polynômes $P \in \mathbb{Q}[X]$ vérifiant $P(x) = 0$, est une puissance de 2.*

5.1. L'impossibilité de la duplication du cube

La duplication du cube ne peut pas s'effectuer à la règle et au compas.

Cela découle du fait suivant :

Théorème 2.
$\sqrt[3]{2}$ n'est pas un nombre constructible.

Démonstration. $\sqrt[3]{2}$ est une racine du polynôme $P(X) = X^3 - 2$. Ce polynôme est unitaire et irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$, donc $\sqrt[3]{2}$ est un nombre algébrique de degré 3. Ainsi son degré algébrique n'est pas de la forme 2^n. Bilan : $\sqrt[3]{2}$ n'est pas constructible. □

5.2. L'impossibilité de la quadrature du cercle

La quadrature du cercle ne peut pas s'effectuer à la règle et au compas.

C'est une reformulation du théorème suivant, dû à Ferdinand von Lindemann (en 1882) :

Théorème 3.
π n'est pas un nombre algébrique (donc n'est pas constructible).

Comme π n'est pas constructible, alors $\sqrt{\pi}$ n'est pas constructible non plus (c'est la contraposée de $x \in \mathscr{C}_{\mathbb{R}} \implies x^2 \in \mathscr{C}_{\mathbb{R}}$).
Nous ne ferons pas ici la démonstration que π n'est pas un nombre algébrique, mais c'est une démonstration qui n'est pas si difficile et abordable en première année.

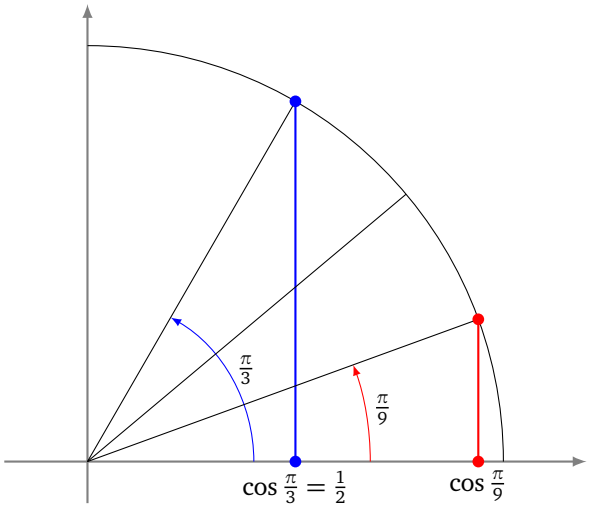
5.3. L'impossibilité de la trisection des angles

La trisection des angles ne peut pas s'effectuer à la règle et au compas.

Plus précisément nous allons exhiber un angle que l'on ne peut pas couper en trois.

Théorème 4.
L'angle $\frac{\pi}{3}$ est constructible mais ne peut pas être coupé en trois car $\cos\frac{\pi}{9}$ n'est pas un nombre constructible.

Bien sûr l'angle $\frac{\pi}{3}$ est constructible car $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$. La preuve de la non constructibilité de l'angle $\frac{\pi}{9}$ fait l'objet d'un exercice : $\cos\frac{\pi}{9}$ est un nombre algébrique de degré algébrique 3, donc il n'est pas constructible.



La trisection n'est donc pas possible en général, mais attention, pour certains angles particuliers c'est possible : par exemple les angles π ou $\frac{\pi}{2}$!

6. Exercices

6.1. Constructions élémentaires

Exercice 1 (Constructions élémentaires)**.**
Étant donné deux points A, B, dessiner à la règle et au compas :

1. un triangle équilatéral de base $[AB]$,
2. un carré de base $[AB]$,
3. un rectangle dont l'un des côtés est $[AB]$ et l'autre est de longueur double,
4. un losange dont l'une des diagonales est $[AB]$ et l'autre est de longueur $\frac{1}{4}AB$,
5. un hexagone régulier dont l'un des côtés est $[AB]$.

Exercice 2 (Centres de cercles).

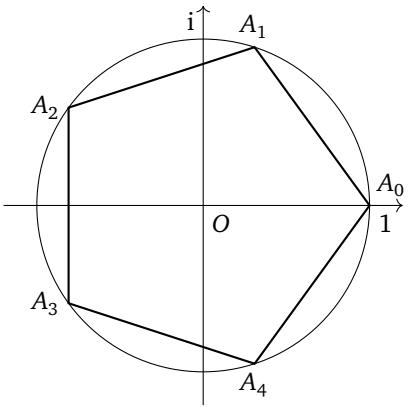
- Étant donné un cercle dont on a perdu le centre, retrouver le centre à la règle et compas.
- Étant donné un triangle, tracer son cercle circonscrit.
- Étant donné un triangle, tracer son cercle inscrit.

Exercice 3 (Construction au compas seul).
Construire au compas seulement :

1. Le symétrique de P par rapport à une droite (AB). (Seuls les points P, A, B sont tracés, pas la droite.)
2. Le symétrique d'un point P par rapport à un point O.
3. (*) Le milieu de deux points A, B. (La droite (AB) n'est pas tracée !)

Exercice 4 (Pentagone régulier).
Soit $(A_0, A_1, A_2, A_3, A_4)$ un pentagone régulier. On note O son centre et on choisit un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$ avec $\vec{u} = \overrightarrow{OA_0}$, qui nous permet d'identifier le plan avec l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$.

1. Donner les affixes $\omega_0, \dots, \omega_4$ des points $A_0, \dots, A_4$. Montrer que $\omega_k = {\omega_1}^k$ pour $k \in \{0,1,2,3,4\}$. Montrer que $1 + \omega_1 + \omega_1^2 + \omega_1^3 + \omega_1^4 = 0$.
2. En déduire que $\cos(\frac{2\pi}{5})$ est l'une des solutions de l'équation $4z^2 + 2z - 1 = 0$. En déduire la valeur de $\cos(\frac{2\pi}{5})$.
3. On considère le point B d'affixe -1. Calculer la longueur BA_2 en fonction de $\cos\frac{2\pi}{5}$ puis de $\sqrt{5}$.
4. On considère le point I d'affixe $\frac{\mathrm{i}}{2}$, le cercle $\mathscr{C}$ de centre I de rayon $\frac{1}{2}$ et enfin le point J d'intersection de $\mathscr{C}$ avec le segment $[BI]$. Calculer la longueur BI puis la longueur BJ.
5. **Application :** Dessiner un pentagone régulier à la règle et au compas. Expliquer.



6.2. Les nombres constructibles à la règle et au compas

Exercice 5 (Construction de l'axe des ordonnées).

1. Montrer qu'il possible de construire un point de l'axe des ordonnées (autre que l'origine) dans l'ensemble des points constructibles $\mathscr{C}_3$.
2. En déduire que $\mathscr{C}_4$ contient le point $(0,1)$.

Exercice 6 (Constructions approchant π).

1. Construire les approximations suivantes de π : $\frac{22}{7} = 3,1428\dots$, $\sqrt{2} + \sqrt{3} = 3,1462\dots$
2. Construire $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$, $10^{\frac{1}{4}}$, $\sqrt{10 - \sqrt{3}}$.

Exercice 7 (Approximation de Kochanski).
Une valeur approchée de π avec quatre décimales exactes est donnée par

$$\phi = \sqrt{\frac{40}{3} - 2\sqrt{3}} = 3,141533\ldots$$

Soient les points suivants $O(0,0)$, $I(1,0)$, $Q(2,0)$. On construit les points $P_1, P_2, \ldots$ ainsi :

- P_1 est l'intersection des cercles centrés en O et I de rayon 1 ayant une ordonnée positive.
- P_2 est l'intersection des cercles centrés en O et P_1 de rayon 1 (l'autre intersection est I).
- P_3 est l'intersection de la droite (P_2I) avec l'axe des ordonnées.
- P_4 est l'image de P_3 par une translation de vecteur $(0,-3)$.

Calculer les coordonnées de chacun des P_i. Montrer que la longueur P_4Q vaut ϕ.

6.3. Éléments de théorie des corps

Exercice 8 (Extensions quadratiques).

1. Montrer que $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}(\sqrt{2})$.
2. Montrer que $\sqrt{1+\sqrt{2}} \notin \mathbb{Q}(\sqrt{2})$.
3. Montrer que $\sqrt{5} \notin \mathbb{Q}(\sqrt{2})(\sqrt{3})$.
4. Trouver un polynôme $P \in \mathbb{Q}[X]$ tel que que $P(\sqrt{1+\sqrt{2}}) = 0$.
5. Trouver un polynôme $P \in \mathbb{Q}[X]$ tel que que $P(\sqrt{2}+\sqrt{3}) = 0$.

Exercice 9 (Degré algébrique).

1. Soit $x \in \mathbb{R}$ montrer que $\mathbb{Q}(x)$, le plus petit corps contenant x, vérifie :
$$\mathbb{Q}(x) = \left\{ \frac{P(x)}{Q(x)} \mid P, Q \in \mathbb{Q}[X] \text{ et } Q(x) \neq 0 \right\}.$$
2. Montrer que $K = \left\{ a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{2}^2 \mid a, b, c \in \mathbb{Q} \right\}$ est un corps.
3. Montrer que $K = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$; c'est-à-dire que K est le plus petit corps contenant $\mathbb{Q}$ et $\sqrt[3]{2}$.
4. Vérifier sur cet exemple que le degré algébrique de $\sqrt[3]{2}$ égale le degré de l'extension $[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) : \mathbb{Q}]$.
5. Expliciter une extension de $\mathbb{Q}$ ayant le degré 4.

Exercice 10 (Nombres transcendants).

1. Montrer que l'ensemble des nombres réels algébriques est un ensemble dénombrable.
2. En déduire l'existence de nombres réels qui ne soient pas algébriques.

Indications :

1. Un nombre algébrique est par définition une racine d'un polynôme P de $\mathbb{Q}[X]$.
2. $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

6.4. Corps et nombres constructibles

Exercice 11 (Corps stables par racine carrée).
Un corps $K \subset \mathbb{R}$ est *stable par racine carrée* s'il vérifie la propriété suivante :

$$\forall x \in K \qquad x \geqslant 0 \Rightarrow \sqrt{x} \in K.$$

Montrer que l'ensemble $\mathscr{C}_{\mathbb{R}}$ des nombres constructibles est le plus petit sous-corps de $\mathbb{R}$ stable par racine carrée.
Indication : Utiliser le théorème de Wantzel.

6.5. Applications aux problèmes grecs

Exercice 12 (Trissection des angles)**.**
Le but est de montrer que tous les angles ne sont pas *trissectables* (divisibles en trois) à la règle et au compas. Nous allons le prouver pour l'angle $\frac{\pi}{3}$: plus précisément le point de coordonnées $(\cos\frac{\pi}{3}, \sin\frac{\pi}{3})$ est constructible mais le point $(\cos\frac{\pi}{9}, \sin\frac{\pi}{9})$ ne l'est pas.

1. Exprimer $\cos(3\theta)$ en fonction de $\cos\theta$.
2. Soit $P(X) = 4X^3 - 3X - \frac{1}{2}$. Montrer que $P(\cos\frac{\pi}{9}) = 0$. Montrer que $P(X)$ est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$.
3. Conclure.

Indications :

1. À l'aide des nombres complexes, calculer $(e^{i\theta})^3$ de deux façons.
2. Tout d'abord montrer que s'il était réductible alors il aurait racine dans $\mathbb{Q}$. Si $\frac{a}{b}$ est cette racine avec $\text{pgcd}(a,b) = 1$ alors à partir de $P(\frac{a}{b}) = 0$ obtenir une équation d'entiers.
3. Utiliser le théorème de Wantzel.

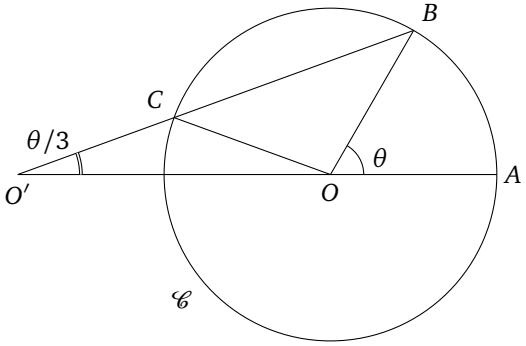
6.6. Constructions assistées

Exercice 13 (Spirale d'Archimède)**.**
Soit $(\mathscr{S})$ la *spirale d'Archimède* paramétrée par

$$M_t = \big(t\cos(2\pi t), t\sin(2\pi t)\big), \quad t \geqslant 0.$$

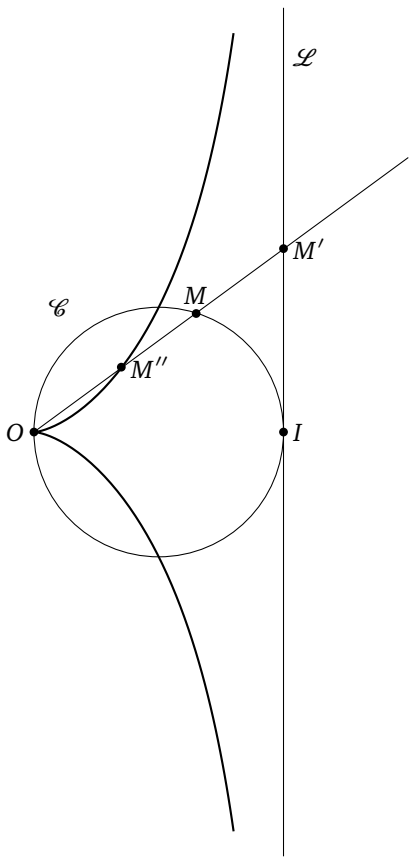
1. Tracer $\mathscr{S}$.
2. *Trissection des angles*. Étant tracée la spirale d'Archimède, construire avec la règle et le compas la trissection d'un angle donné.
   Indications. Supposer l'angle $\theta < \frac{\pi}{2}$. Écrire l'angle sous la forme $\theta = 2\pi t$; placer M_t et tracer un cercle centré à l'origine du bon rayon.
3. *Quadrature du cercle.*
   (a) Calculer une équation de la tangente à $(\mathscr{S})$ en un point M_t.
   (b) La tangente en M_1 (pour $t = 1$) coupe l'axe des ordonnées en N. Calculer la longueur ON.
   (c) En déduire qu'avec le tracé de la spirale d'Archimède et le tracé de la tangente en M_1 on peut résoudre la quadrature du cercle à la règle et au compas.

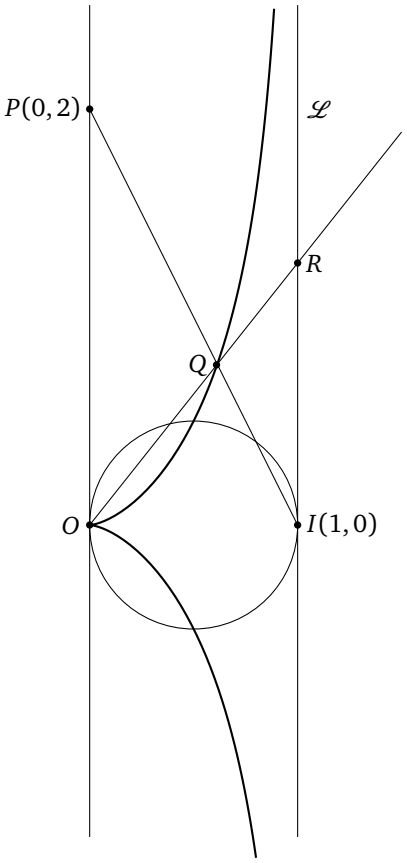
Exercice 14 (La règle tournante)**.**
On souhaite trissecter les angles à l'aide d'un compas et d'une règle graduée. Soit $\mathscr{C}$ le cercle de rayon $r > 0$ centré en O. Soient $A, B \in \mathscr{C}$ de telle sorte que l'angle en O d'un triangle OAB soit aigu. Notons θ cet angle. *Sur la règle* marquer deux points O' et C tel que $O'C = r$. Faire pivoter et glisser la règle autour du point B afin que le point C appartienne à $\mathscr{C}$ et le point O' appartiennent à la droite (OA) (de sorte que O soit dans le segment $[O'A]$). Montrer que l'angle en O' du triangle $AO'B$ vaut $\frac{\theta}{3}$.



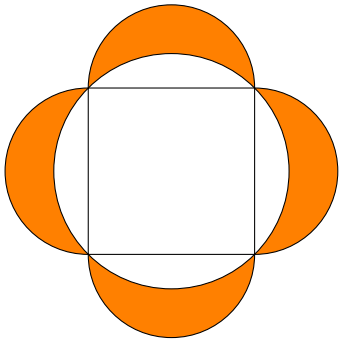
Exercice 15 (Cissoïde de Dioclès)**.**
Soient les points $O(0,0)$ et $I(1,0)$. Soit $\mathscr{C}$ le cercle de diamètre $[OI]$ et $\mathscr{L}$ la droite d'équation $(x=1)$. Pour un point M de $\mathscr{C}$, soit M' l'intersection de (OM) avec $\mathscr{L}$. Soit enfin M'' le point tel que $\overrightarrow{OM''} = \overrightarrow{MM'}$. L'ensemble des points M'' lorsque M parcourt $\mathscr{C}$ est *la cissoïde de Dioclès*, notée $\mathscr{D}$.
Le but de l'exercice est de montrer que la duplication du cube est possible à l'aide de la règle, du compas et du tracé de la cissoïde.

1. La droite (OM) ayant pour équation $(y=tx)$, exprimer les coordonnées de M, M' puis M'' en fonction de t.
2. En déduire une équation paramétrique de $\mathscr{D}$:
$$x(t) = \frac{t^2}{1+t^2}, \quad y(t) = \frac{t^3}{1+t^2}.$$
3. Montrer qu'une équation cartésienne de $\mathscr{D}$ est :
$$x(x^2+y^2) - y^2 = 0.$$
4. Étudier et tracer $\mathscr{D}$.
5. Soit $P(0,2)$. La droite (PI) coupe $\mathscr{D}$ en un point noté Q. La droite (OQ) coupe $\mathscr{L}$ en un point noté R. Calculer une équation de (PI) ainsi que les coordonnées de Q et R.
6. Conclure.





Exercice 16 (Lunules d'Hippocrate de Chios)**.**
Montrer que l'aire des quatre lunules égale l'aire du carré.
Indication : C'est un simple calcul d'aires : calculer l'aire totale formée par la figure de deux façons différentes.



Pour aller plus loin voici quelques références :

- *Théorie des corps. La règle et le compas.* J.-L. Carrega, Hermann, 2001.
  Un livre complet sur le sujet !
- *Nombres constructibles.* V. Vassallo, Ph. Royer, IREM de Lille, 2002.
  Avec un point de vue pour le collège et le lycée.
- *Sur les nombres algébriques constructibles à la règle et au compas.* A. Chambert-Loir, Gazette des mathématiciens 118, 2008.
  Vous trouverez dans cet article une réciproque du corollaire au théorème de Wantzel, prouvée de façon « élémentaire », c'est-à-dire sans faire usage de la théorie de Galois.

Auteurs du chapitre Arnaud Bodin.
Relu par Vianney Combet.

Chapitre 2

L'inversion

L'inversion géométrique est une transformation remarquable du plan. Par exemple, elle peut changer une droite en un cercle et un cercle en une droite. Nous étudions ici quelques propriétés de l'inversion. Cela nous permettra de créer un dispositif mécanique qui transforme un mouvement circulaire en un mouvement rectiligne. Nous montrerons enfin que toute construction à la règle et au compas peut s'effectuer au compas seulement.

1. Cercle-droite

1.1. Équation complexe d'une droite

Soit

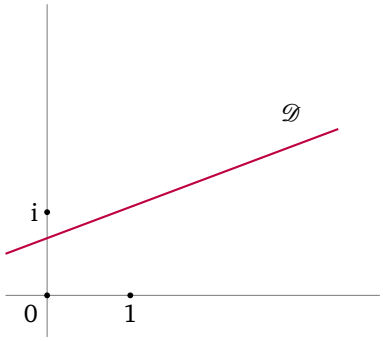
$$ax + by = c$$

l'équation réelle d'une droite $\mathscr{D}$: a, b, c sont des nombres réels (a et b n'étant pas nuls en même temps), et $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ désigne un point du plan dont les coordonnées satisfont l'équation.
Écrivons $z = x + \mathrm{i}\, y \in \mathbb{C}$. Alors

$$x = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad y = \frac{z - \bar{z}}{2\mathrm{i}},$$

donc $\mathscr{D}$ a aussi pour équation $a(z + \bar{z}) - \mathrm{i}\, b(z - \bar{z}) = 2c$ ou encore $(a - \mathrm{i}\, b)z + (a + \mathrm{i}\, b)\bar{z} = 2c$. Posons $\omega = a + \mathrm{i}\, b \in \mathbb{C}^*$ et $k = 2c \in \mathbb{R}$. Alors nous obtenons que

> l'*équation complexe* d'une droite est :
>
> $$\bar{\omega} z + \omega \bar{z} = k$$
>
> où $\omega \in \mathbb{C}^*$ et $k \in \mathbb{R}$.



1.2. Équation complexe d'un cercle

Soit $\mathscr{C}(\Omega, r)$ le cercle de centre Ω et de rayon r. C'est l'ensemble des points M tels que $d(\Omega, M) = r$. Si l'on note ω l'affixe de Ω et z l'affixe de M, nous obtenons :

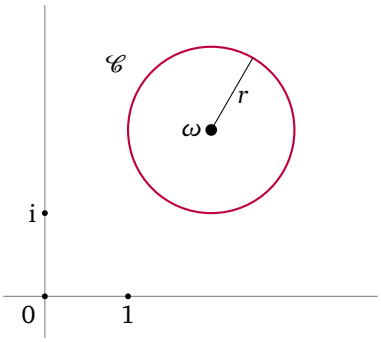
$$d(\Omega, M) = r \iff |z-\omega| = r \iff |z-\omega|^2 = r^2 \iff (z-\omega)\overline{(z-\omega)} = r^2$$

et en développant nous trouvons que

l'*équation complexe* du cercle centré en $\Omega(\omega)$ et de rayon r est :

$$z\bar{z} - \bar{\omega}z - \omega\bar{z} = r^2 - |\omega|^2$$

où $\omega \in \mathbb{C}$ et $r \geqslant 0$.



1.3. Les cercles-droites

Les deux paragraphes précédents conduisent à la définition suivante.

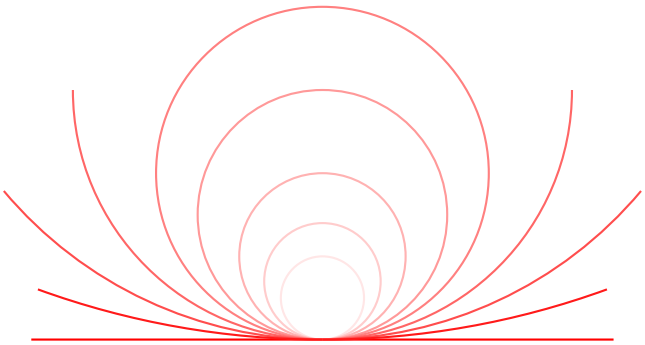
Proposition 1.
Un **cercle-droite** *est un ensemble de points M du plan, d'affixe z, tel que*

$$az\bar{z} - \bar{\omega}z - \omega\bar{z} = k$$

où $a, k \in \mathbb{R}$, $\omega \in \mathbb{C}$ sont donnés.

- *Si $a = 0$, un cercle-droite est une droite.*
- *Si $a \neq 0$, un cercle-droite est un cercle.*

Exemple 1.
Le cercle $\mathscr{C}_r = \mathscr{C}(\Omega(0, r), r)$ a pour équation $z\bar{z} - \bar{\omega}_r z - \omega_r \bar{z} = r^2 - |\omega_r|^2$ avec son centre d'affixe $\omega_r = 0 + \mathrm{i}\, r$. Cette équation s'écrit aussi $z\bar{z} + \mathrm{i}\, rz - \mathrm{i}\, r\bar{z} = 0$ ou encore $z - \bar{z} + \frac{z\bar{z}}{\mathrm{i}\, r} = 0$. On fait tendre r vers l'infini : le rayon tend vers l'infini et le centre s'éloigne indéfiniment ; cependant le cercle passe toujours par l'origine. À la limite l'équation devient $z - \bar{z} = 0$, qui est l'équation d'une droite, et plus précisément de l'axe des abscisses. Une droite peut être vue comme un cercle dont le centre est à l'infini.

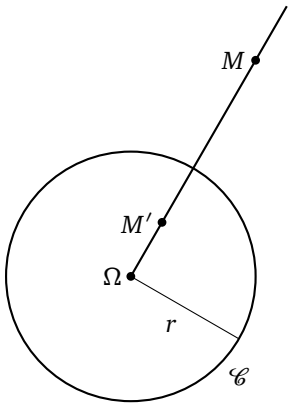


2. L'inversion

2.1. Définition géométrique

Soit le cercle $\mathscr{C} = \mathscr{C}(\Omega, r)$. L'***inversion*** est l'application du plan privé de Ω dans lui-même, qui à un point M associe un point M' tel que :

- $M' \in [\Omega M)$,
- $\Omega M \cdot \Omega M' = r^2$.



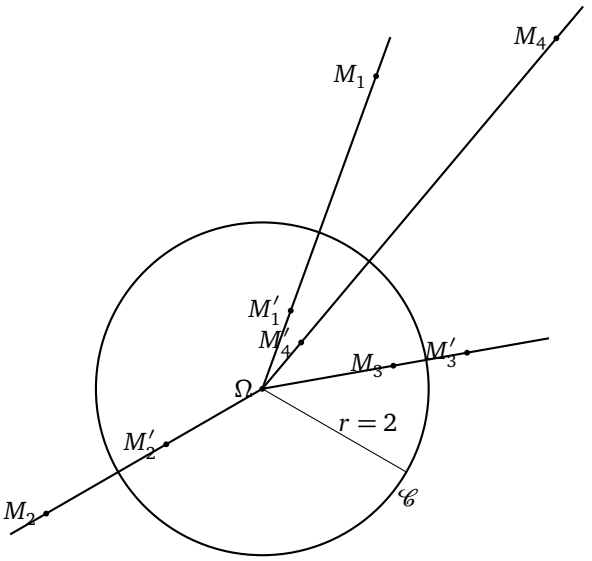
La première condition impose que M' est sur la demi-droite issue de Ω passant par M, et la deuxième condition lie les distances de M et M' à Ω.
Le point Ω est le ***centre*** de l'inversion, le nombre r^2 est sa ***puissance***, et $\mathscr{C}(\Omega, r)$ est le ***cercle d'inversion***.
Voici quelques propriétés élémentaires ($\mathscr{P}$ désigne le plan) :

Proposition 2.
Soit $i : \mathscr{P} \setminus \{\Omega\} \to \mathscr{P} \setminus \{\Omega\}$ une inversion de centre Ω et de puissance r^2.

1. *Chaque point du cercle $\mathscr{C}(\Omega, r)$ est invariant par i : $M \in \mathscr{C}(\Omega, r) \implies i(M) = M$.*
2. *L'inversion i est une bijection. C'est même une involution : pour tout point $M \in \mathscr{P} \setminus \{\Omega\}$, $i(i(M)) = M$.*

Le fait que $M \mapsto i(M)$ soit une involution se formule aussi ainsi : si $M' = i(M)$ alors $M = i(M')$.

Exemple 2.
Soit i l'inversion de centre Ω et de puissance $r^2 = 4$. Nous représentons des points M_k ainsi que leur image $M'_k = i(M_k)$. Comme l'inversion est involutive, nous avons aussi $M_k = i(M'_k)$. Il est important de noter que *l'inversion ne préserve pas les longueurs*.



Par exemple, comparez les distances M_1M_4 et $M_1'M_4'$. Voir l'exercice 4 pour une formule.

Démonstration.

1. Soit $M \in \mathscr{C}(\Omega, r)$ et notons $M' = i(M)$. La relation entre les distances s'écrit $\Omega M \cdot \Omega M' = r^2$. Mais comme $\Omega M = r$, alors nous avons aussi $\Omega M' = r$. Comme M et M' sont sur la même demi-droite issue de Ω, alors $M = M'$.
2. Soit $M \in \mathscr{P} \setminus \{\Omega\}$. Notons $M' = i(M)$ et $M'' = i(M')$. Comme $M'' \in [\Omega M')$ et $M' \in [\Omega M)$, alors M'' appartient à la demi-droite $[\Omega M)$. Les relations entre les distances sont d'une part $\Omega M \cdot \Omega M' = r^2$ et $\Omega M' \cdot \Omega M'' = r^2$. D'où les égalités $\Omega M \cdot \Omega M' = \Omega M' \cdot \Omega M''$, puis $\Omega M = \Omega M''$. Comme M et M'' sont sur la même demi-droite issue de Ω, alors $M = M''$.

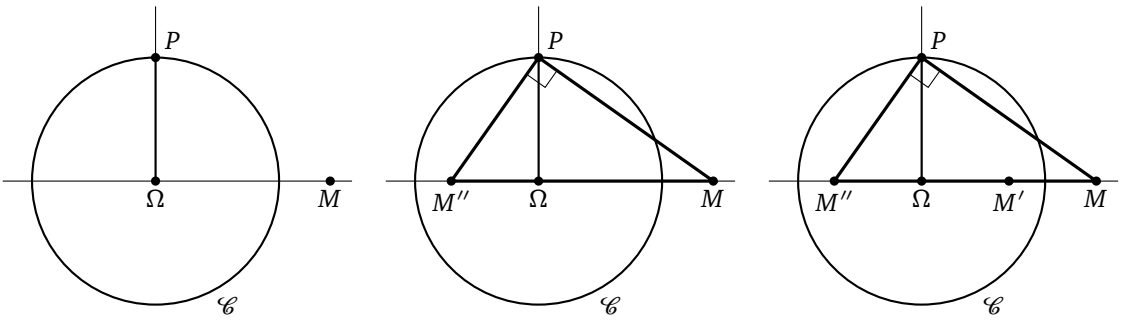
   Le bilan est le suivant : $i\big(i(M)\big) = M$. L'application $M \mapsto i(M)$ est donc une involution. En particulier c'est une bijection.

□

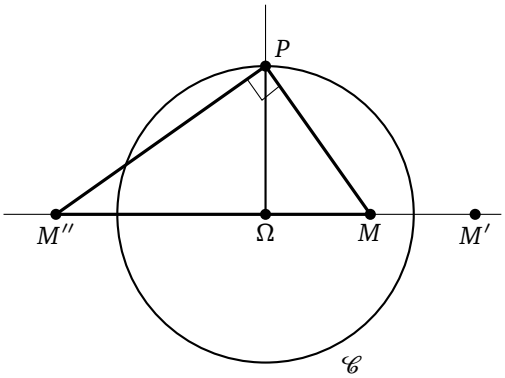
2.2. Construction de l'inverse d'un point à la règle et au compas

Étant donné un cercle $\mathscr{C}$ de centre Ω et un point M différent de Ω. Comment construire géométriquement, l'image de M par l'inversion i de cercle $\mathscr{C}$?

- Tracer la perpendiculaire à (ΩM) en Ω. Cette perpendiculaire recoupe le cercle $\mathscr{C}$ en un point P.
- Tracer la perpendiculaire à (MP) en P. Cette droite recoupe (ΩM) en un point M''.
- Le symétrique de M'' par rapport à Ω est le point M' qui est l'inverse de M : $M' = i(M)$.



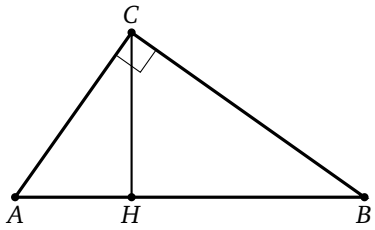
La construction fonctionne aussi si le point M est à l'intérieur du cercle.



On verra une méthode différente, qui n'utilise que le compas dans la section 5.3.

Lemme 1.
Dans un triangle ABC, rectangle en C, où $H \in [AB]$ est le pied de la hauteur en C alors

$$HA \times HB = HC^2$$



Preuve du lemme. On applique le théorème de Pythagore trois fois.

- Dans le triangle ABC : $AB^2 = AC^2 + BC^2$.
- Dans le triangle AHC : $AC^2 = HA^2 + HC^2$.
- Dans le triangle BHC : $BC^2 = HB^2 + HC^2$.

Comme $AB = HA + HB$ alors

$$(HA+HB)^2 = AB^2 = AC^2 + BC^2 = (HA^2 + HC^2) + (HB^2 + HC^2)$$

Donc

$$HA^2 + 2HA \times HB + HB^2 = HA^2 + HB^2 + 2HC^2$$

et ainsi

$$HA \times HB = HC^2$$

□

Preuve de la construction. Dans le triangle $MM''P$ rectangle en P avec Ω le pied de la hauteur, on a d'après le lemme :

$$\Omega M \times \Omega M'' = \Omega P^2$$

comme $\Omega M'' = \Omega M'$ et que $\Omega P = r$, alors

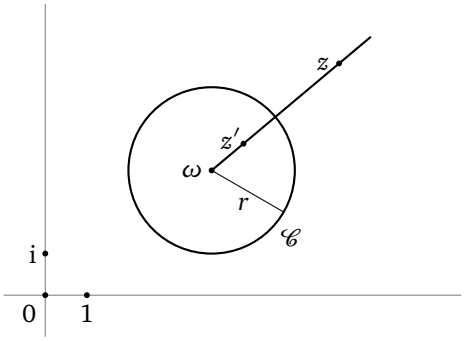
$$\Omega M \times \Omega M' = r^2$$

et comme M' est bien sur la demi-droite $[\Omega M)$, M' est l'inverse de M. □

2.3. Écriture complexe

Considérons les points et leur affixe $\Omega(\omega)$, $M(z)$, $M'(z')$. Nous allons transformer la relation $M' = i(M)$ en une condition entre z et z'. La première condition $M' \in [\Omega M)$ s'écrit $z' - \omega = \lambda(z - \omega)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\lambda \geqslant 0$. La deuxième condition $\Omega M \cdot \Omega M' = r^2$ devient en écriture complexe $|z - \omega| \cdot |z' - \omega| = r^2$, ce qui donne à l'aide de la première condition $\lambda |z - \omega|^2 = r^2$ et donc $\lambda = \frac{r^2}{|z-\omega|^2}$. Nous exprimons alors z' comme une fonction de z :

$$z' = \omega + r^2 \frac{z - \omega}{|z - \omega|^2} = \omega + \frac{r^2}{\overline{z - \omega}}.$$



Ceci nous permet de donner la définition complexe de l'inversion :

> L'***inversion*** est l'application $i : \mathbb{C} \cup \{\infty\} \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ définie par $i(z) = \omega + \frac{r^2}{\overline{z-\omega}}$ pour $z \in \mathbb{C} \setminus \{\omega\}$ et prolongée par $i(\omega) = \infty$ et $i(\infty) = \omega$.

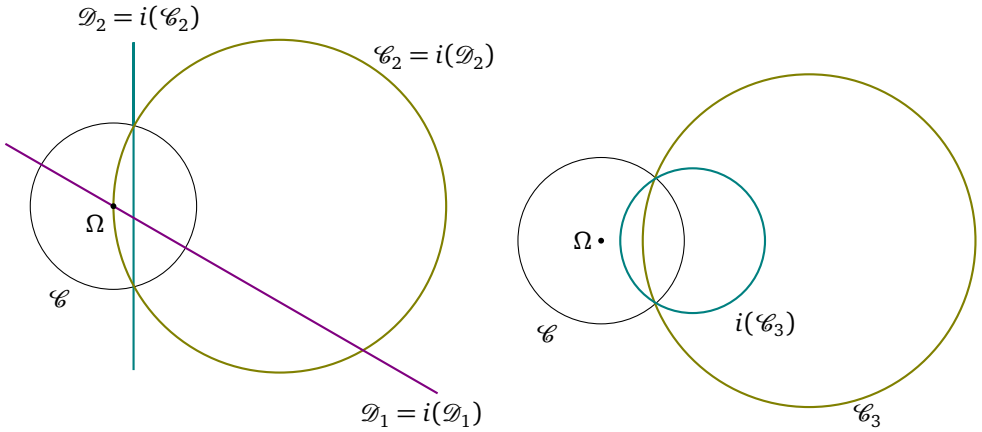
Exemple 3.
L'inversion de cercle $\mathscr{C}(O,1)$ a pour écriture complexe $i(z) = 1/\bar{z}$ (pour $z \in \mathbb{C}^*$), que l'on prolonge à $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ avec $i(0) = \infty$ et $i(\infty) = 0$.

2.4. Inversion et cercle-droite

Théorème 1.
L'image d'un cercle-droite par une inversion est un cercle-droite.

Plus précisément, nous allons montrer que si i est l'inversion de cercle $\mathscr{C}(\Omega, r)$ alors :
- L'image d'une droite passant par Ω est elle-même.
- L'image d'une droite ne passant pas par Ω est un cercle passant par Ω.
- L'image d'un cercle passant par Ω est une droite ne passant pas par Ω.
- L'image d'un cercle ne passant pas par Ω est un cercle ne passant pas par Ω.

Les trois premiers cas sont sur la figure de gauche, le dernier sur la figure de droite.



Démonstration. Remarquons tout d'abord que, pour une translation, l'image d'une droite est une droite et l'image d'un cercle est un cercle. Il en va de même pour les homothéties.
Donc, par une translation, nous nous ramenons à démontrer la proposition dans le cas où le centre de l'inversion est situé à l'origine du plan complexe. Par une homothétie, nous supposons même que le cercle d'inversion est de rayon 1. Après ces deux réductions, nous nous sommes ramenés au cas où l'inversion a pour écriture complexe :

$$i(z) = \frac{1}{\bar{z}}.$$

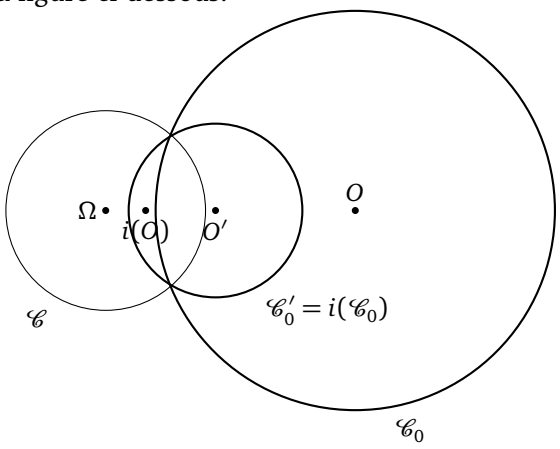
Soit maintenant $\mathscr{C}$ un cercle-droite d'équation $az\bar{z} - \bar{\omega}z - \omega\bar{z} = k$ ($a, k \in \mathbb{R}$, $\omega \in \mathbb{C}$). Soit $M(z)$ un point du plan (d'affixe z) et notons M' l'image de M par notre inversion qui sera donc d'affixe $z' = i(z) = \frac{1}{\bar{z}}$. On a alors les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
M(z) \in \mathscr{C} &\iff az\bar{z} - \bar{\omega}z - \omega\bar{z} = k \\
&\iff a - \bar{\omega}\frac{1}{\bar{z}} - \omega\frac{1}{z} = \frac{k}{z\bar{z}} \quad \text{en divisant par } z\bar{z} \\
&\iff a - \bar{\omega}z' - \omega\bar{z}' = kz'\bar{z}' \quad \text{car } z' = 1/\bar{z} \\
&\iff kz'\bar{z}' + \bar{\omega}z' + \omega\bar{z}' = a
\end{aligned}$$

Mais la dernière ligne est l'équation d'un autre cercle-droite $\mathscr{C}'$. Bilan : $M(z) \in \mathscr{C}$ si et seulement si $i(M) \in \mathscr{C}'$. Autrement dit l'image du cercle-droite $\mathscr{C}$ est le cercle-droite $\mathscr{C}'$.
Il suffit de regarder les équations pour obtenir les différents cas. Par exemple, si notre cercle-droite passe par l'origine (c'est le cas lorsque $k = 0$), il faut traiter le cas $z = 0$ à part et se rappeler notre convention $i(0) = \infty$. Dans ce cas l'équation obtenue pour $\mathscr{C}'$ est celle d'une droite. □

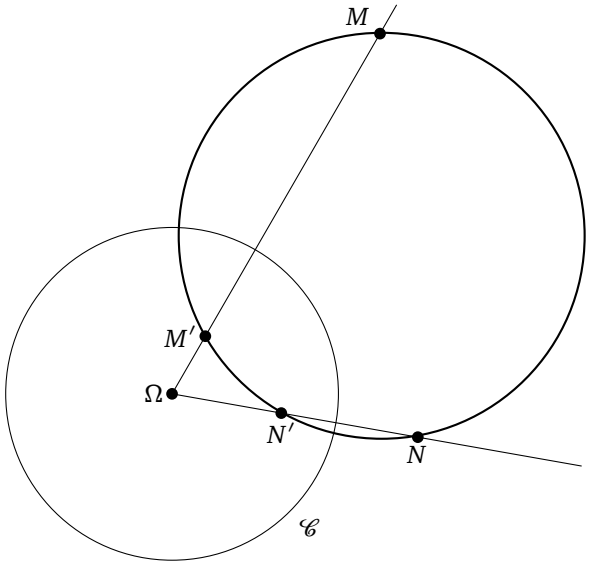
Remarque.

- L'image d'une droite $\mathscr{D}$ passant par le centre d'une l'inversion i est la droite elle-même : $i(\mathscr{D}) = \mathscr{D}$. La droite est ***invariante globalement***. Un point de la droite est envoyé sur un autre point de la droite. Par contre, chaque point du cercle d'inversion est conservé par l'inversion : c'est l'***invariance point par point***. Si $\mathscr{C}$ est le cercle d'inversion, cela s'écrit :
$$\forall P \in \mathscr{C} \quad i(P) = P.$$
La droite $\mathscr{D}$ passant par l'origine *n'est pas* invariante point par point.
- Même si l'image d'un cercle $\mathscr{C}_0$ de centre O est un cercle $\mathscr{C}_0' = i(\mathscr{C}_0)$ de centre O', on n'a pas forcément $O' = i(O)$ comme l'illustre la figure ci-dessous.



2.5. Inversion et cocyclicité

Proposition 3.
Soient i une inversion et M, N deux points du plan. Les points M, N, $i(M)$, $i(N)$ sont cocycliques (ou alignés).



C'est un résultat important et utile qui est démontré dans l'exercice 3.

3. Les homographies

3.1. Définition

Une ***homographie*** est une application $h : \mathbb{C} \cup \{\infty\} \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ définie par :

$$h(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \qquad h(\infty) = \frac{a}{c}, \qquad h\left(-\frac{d}{c}\right) = \infty,$$

avec $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ tels que $ad - bc \neq 0$. (Remarque : si $c = 0$, l'homographie est une similitude du type $h(z) = az + b$ avec $h(\infty) = \infty$.)

Proposition 4.
Une homographie est la composée d'une inversion $z \mapsto 1/\bar{z}$, d'une réflexion $z \mapsto \bar{z}$, de translations $z \mapsto z + \alpha$ et de rotations-homothéties $z \mapsto \lambda z$ ($\alpha, \lambda \in \mathbb{C}$).

En particulier une homographie est une application bijective.

Démonstration. Tout d'abord, par la composition d'une rotation, d'une homothétie et d'une translation, nous définissons $h_1(z) = cz + d$. Puis $h_2(z) = \frac{1}{z}$ est la composée d'une inversion $z \mapsto \frac{1}{\bar{z}}$ et d'une réflexion $z \mapsto \bar{z}$. Nous obtenons donc $h_2 \circ h_1(z) = \frac{1}{cz+d}$. Posons $h_3(z) = \alpha z + \beta$ (encore la composition d'une rotation, d'une homothétie et d'une translation). Alors

$$h_3 \circ h_2 \circ h_1(z) = \frac{\alpha}{cz+d} + \beta = \frac{\beta cz + \beta d + \alpha}{cz+d} = \frac{az+b}{cz+d},$$

si l'on a choisi $\beta = \frac{a}{c}$ et $\alpha = b - \frac{a}{c}d$. □

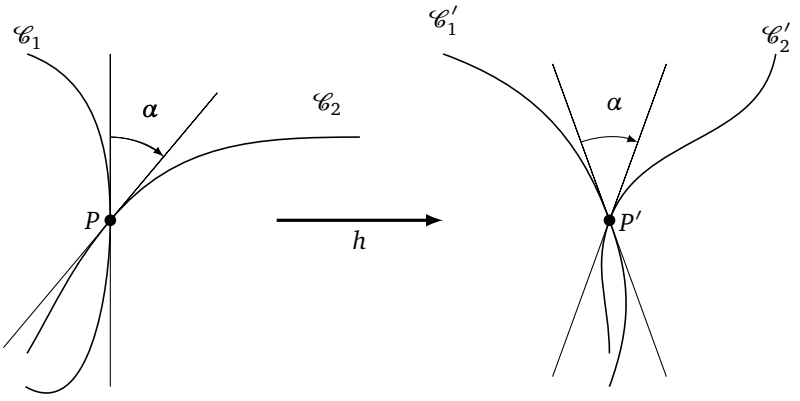
Corollaire 1.
L'image par une homographie d'un cercle-droite est un cercle-droite.

Démonstration. L'image d'une droite par une translation est une droite. De même, l'image d'un cercle par une translation est un cercle. Il en va de même pour les rotations, pour les homothéties et pour les réflexions. L'image d'un cercle par une inversion est un cercle ou une droite, et l'image d'une droite par une inversion est un cercle ou une droite. Par composition, l'image d'un cercle-droite par une homographie est un cercle-droite. □

3.2. Homographies et angles

Théorème 2.
Les homographies préservent les angles orientés.

Voyons d'abord ce que cela signifie. Soient deux courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ qui s'intersectent en un point P. Soit α l'angle formé par les deux tangentes à $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ en P. Soit h notre homographie ; notons $\mathscr{C}_1' = h(\mathscr{C}_1)$, $\mathscr{C}_2' = h(\mathscr{C}_2)$, et $P' = h(P)$ qui appartient à l'intersection de $\mathscr{C}_1'$ et $\mathscr{C}_2'$. Alors les deux tangentes à $\mathscr{C}_1'$ et $\mathscr{C}_2'$ en P forment le même angle α.



Dans la pratique, le corollaire suivant est très utile :

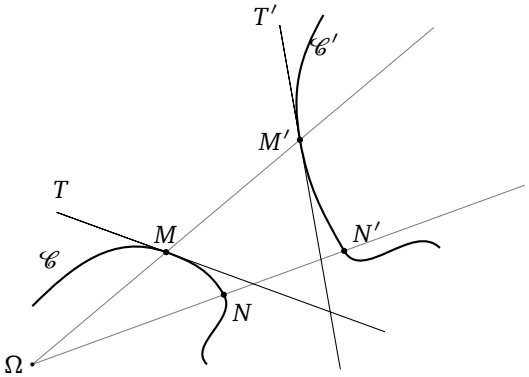
Corollaire 2.
Soit h une homographie. Si deux courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ sont tangentes en un point M (resp. perpendiculaires en M) alors les courbes $h(\mathscr{C}_1)$ et $h(\mathscr{C}_2)$ sont tangentes en $h(M)$ (resp. perpendiculaires en $h(M)$).

En fait, on prouve en même temps que :

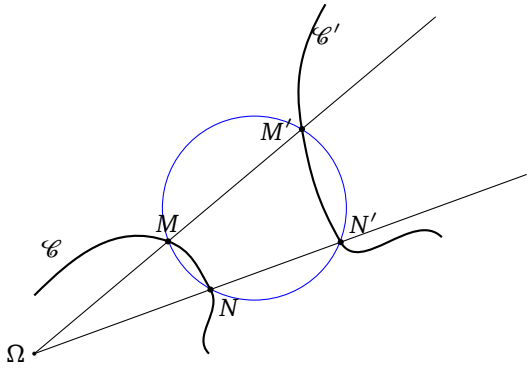
Corollaire 3.
Soit i une inversion. Si deux courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ sont tangentes en un point M (resp. perpendiculaires en M) alors les courbes $i(\mathscr{C}_1)$ et $i(\mathscr{C}_2)$ sont tangentes en $i(M)$ (resp. perpendiculaires en $i(M)$).

Preuve du théorème 2.

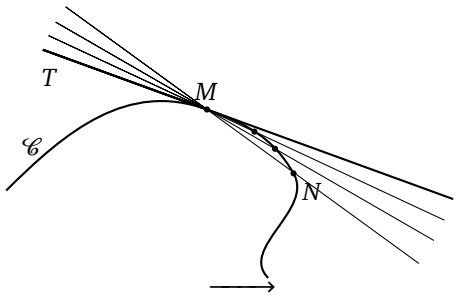
- Encore une fois, nous allons ramener le problème à l'étude d'une inversion. En effet, les homothéties, translations et rotations préservent les angles orientés, alors qu'une réflexion préserve les angles mais change l'orientation. Par la proposition 4, il suffit donc de montrer qu'une inversion préserve aussi les angles mais change l'orientation.
- On se donne une courbe $\mathscr{C}$, un point $M \in \mathscr{C}$, et on note T la tangente à M en $\mathscr{C}$ (nous supposons donc qu'il existe une tangente en ce point). Soit N un autre point de $\mathscr{C}$. Soit i une inversion. On note $\mathscr{C}' = i(\mathscr{C})$, $M' = i(M)$, $N' = i(N)$ et on appelle T' la tangente à $\mathscr{C}'$ en M'. (Attention T' n'est pas forcément égal à $i(T)$, car de toute façon $i(T)$ n'est pas nécessairement une droite...)



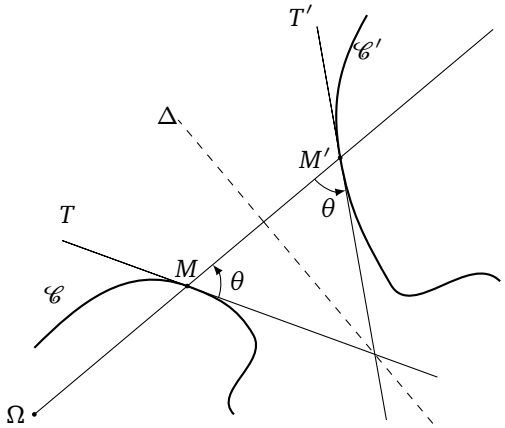
- D'après la proposition 3, les points M, N, M', N' sont cocycliques, donc par le théorème de l'angle inscrit, les angles $(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MN'})$ et $(\overrightarrow{M'N}, \overrightarrow{M'N'})$ sont égaux.



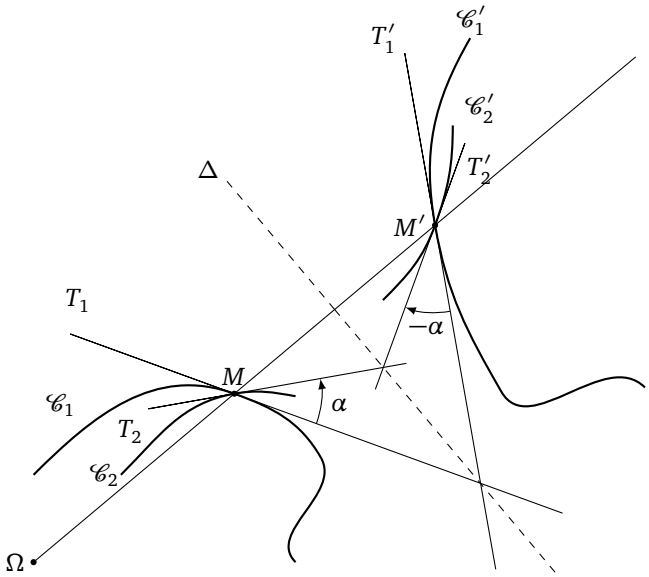
- Faisons tendre le point N vers le point M : alors la droite définie par le vecteur $\overrightarrow{MN}$ et passant par M tend vers la tangente T.



- De plus N' tend vers M' et la droite de vecteur $\overrightarrow{M'N'}$ et passant par M' tend vers T'. À la limite on obtient l'égalité des angles : $(T, \overrightarrow{MM'}) = (\overrightarrow{M'M}, T')$. (Cet angle est noté θ sur la figure ci-dessous.)
- En conséquence les tangentes T et T' sont symétriques l'une de l'autre par la réflexion d'axe Δ, la médiatrice de $[MM']$.



- Si maintenant $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ sont deux courbes qui s'intersectent en M, l'angle entre les deux tangentes T_1 et T_2 étant α, alors par la réflexion d'axe Δ, l'angle entre les deux tangentes T_1' et T_2' en $M' = i(M)$ est $-\alpha$.

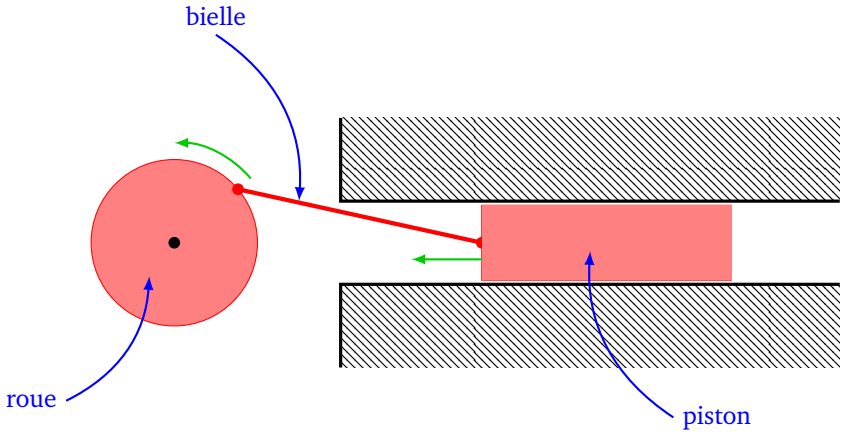


□

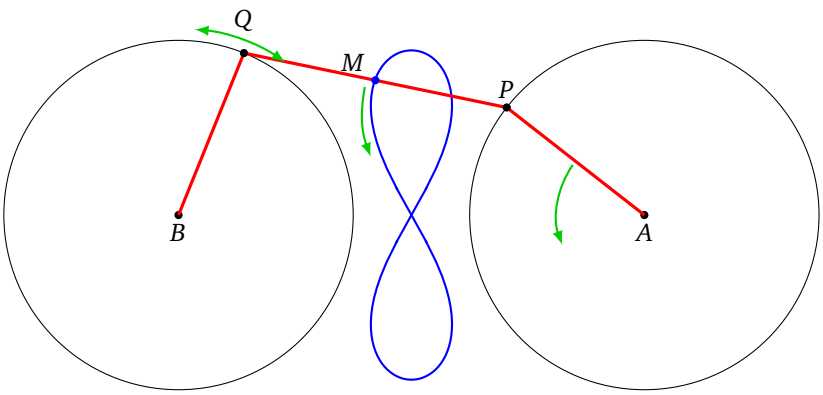
4. Dispositifs mécaniques

4.1. La courbe de Watt

Le but est de transformer un mouvement circulaire en mouvement rectiligne (ou l'inverse). Une solution simple est d'utiliser une bielle et un piston. Le problème est que le coulissage génère des frottements au niveau du piston.



L'ingénieur James Watt améliora le dispositif en inventant un mécanisme qui permet d'obtenir une portion presque rectiligne à partir d'un mouvement circulaire.

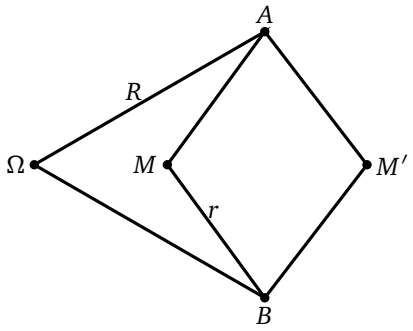


Les points A et B sont fixes. Autour de chacun de ces points est attachée une barre tournante, l'une se terminant en P, l'autre en Q. Ces deux barres sont reliées par une troisième barre qui va de P à Q. On note M le milieu de $[PQ]$. Lorsque l'on fait tourner la barre $[AP]$, alors les trois barres bougent et le point M décrit une ***courbe de Watt***. Une portion de cette courbe (autour de l'auto-intersection) approxime assez bien une portion rectiligne.
Nous allons voir cependant que l'on sait résoudre de façon exacte ce problème : c'est l'inverseur de Peaucellier.

4.2. L'inverseur de Peaucellier

La construction est basée sur le résultat suivant :

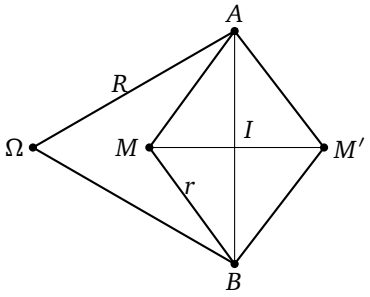
Théorème 3.
Soit la configuration suivante avec $\Omega A = \Omega B = R$ et $AMBM'$ un losange de côté r. Alors M' est l'image de M par l'inversion de centre Ω et de puissance $R^2 - r^2$.



Ce théorème implique donc par inversion le résultat voulu :

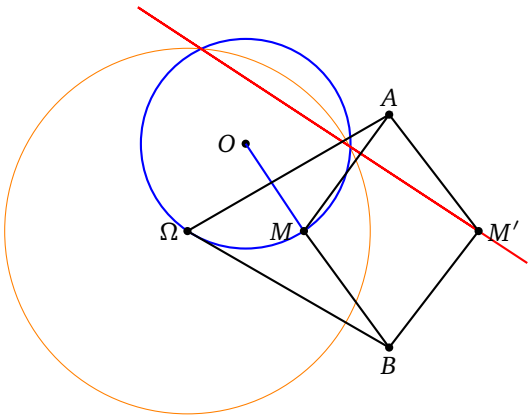
Corollaire 4.
Si M parcourt un cercle passant par Ω, alors M' parcourt une droite.

Preuve du théorème 3. Tout d'abord M, M', Ω sont sur la médiatrice du segment $[AB]$. Donc $M' \in (\Omega M)$. De plus, si l'on suppose $R > r$, alors $M' \in [\Omega M)$.
Calculons maintenant $\Omega M \cdot \Omega M'$. Soit I le centre du losange $AMBM'$. Avec la configuration de la figure ci-dessous, on a $\Omega M = \Omega I - IM$ et $\Omega M' = \Omega I + IM' = \Omega I + IM$. Donc $\Omega M \cdot \Omega M' = (\Omega I - IM)(\Omega I + IM) = \Omega I^2 - IM^2$. De plus, par le théorème de Pythagore, $\Omega I^2 = \Omega A^2 - IA^2$ et $IM^2 = AM^2 - IA^2$. Donc $\Omega M \cdot \Omega M' = \Omega A^2 - AM^2 = R^2 - r^2$.



Nous avons montré que M' est l'image de M par l'inversion de centre Ω et de puissance $R^2 - r^2$. □

Ainsi lorsque le point M décrit une portion du cercle (en bleu sur la figure), le point M' décrit une portion de droite (en rouge). L'autre cercle (en orange) est le cercle d'inversion. Pour la réalisation mécanique de l'inverseur : il faut 6 barres rigides (en noire) articulées à chaque jonction. Les points A, B, M, M' sont libres de mouvement, mais le point Ω est fixe. Pour la réalisation effective, on rajoute une barre fixe (en bleu) qui tourne autour du point fixe O et qui est reliée au point mobile M.



Il existe d'autres dispositifs mécaniques qui transforment un cercle en une droite : voir par exemple l'inverseur de Hart dans l'exercice 8.

4.3. Théorème de Kempe

Il existe en fait un théorème plus général.

> **Théorème 4.**
> *Soit $P(x,y) \in \mathbb{R}[x,y]$ un polynôme de deux variables. Pour n'importe quelle partie bornée de la courbe $\mathscr{C}$ définie par l'équation $P(x,y) = 0$, il existe un dispositif mécanique qui permet de la tracer.*

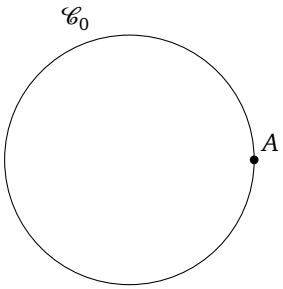
5. Construction au compas seulement

5.1. Problème de Napoléon

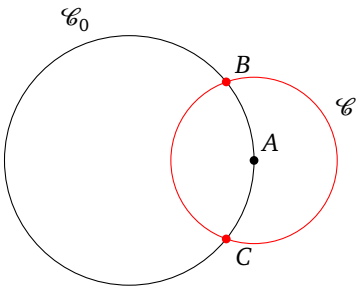
Traçons un cercle, puis effaçons son centre. Il est facile de retrouver le centre avec une règle et un compas. Faites-le ! Oublions maintenant la règle.

Problème de Napoléon. À l'aide du compas seulement, tracer le centre d'un cercle dont on connaît uniquement le contour.

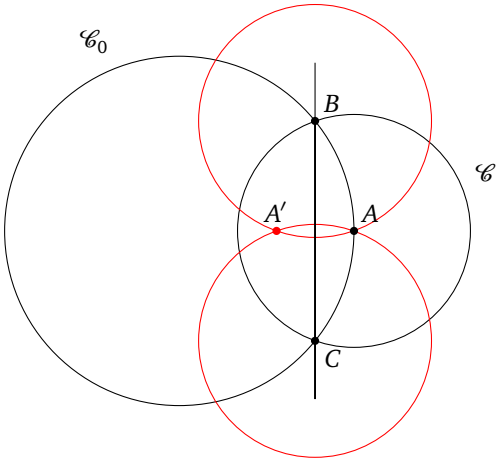
La solution, qui n'a rien d'évidente, utilise l'inversion et se décompose en plusieurs étapes :



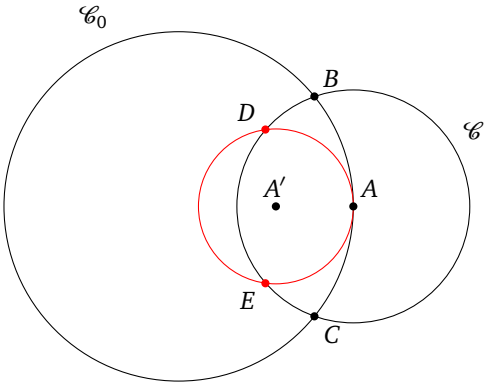
1. Soit $\mathscr{C}_0$ le cercle dont on souhaite trouver le centre. Choisir un point A sur $\mathscr{C}_0$ et prendre un écartement quelconque de compas (mais ni trop grand, ni trop petit : entre une demie fois et deux fois le rayon –inconnu– du cercle $\mathscr{C}_0$).
2. Placer la pointe du compas en A et tracer le cercle $\mathscr{C}$. Ce cercle coupe $\mathscr{C}_0$ en deux points, notés B et C.

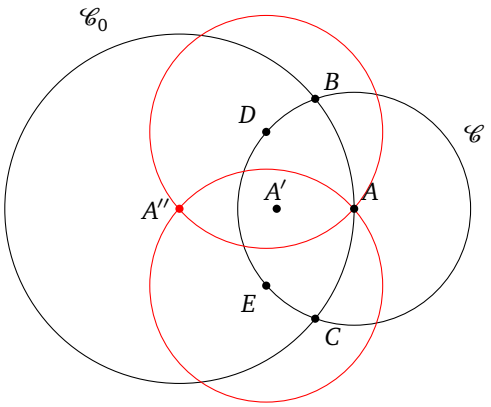


3. Construire A' le symétrique de A par rapport à (BC) : pour cela, tracer les cercles de centre B (puis de centre C) passant par A. Ces deux cercles se coupent en A et A'.



4. Construire l'image de A' par l'inversion i de centre A et de cercle $\mathscr{C}$. Pour cela on trace le cercle de centre A' passant par A; il recoupe $\mathscr{C}$ en D et E. Les cercles de centre D, puis de centre E, passant par A se coupent en A et en $A'' = i(A)$.
5. A'' est le centre de $\mathscr{C}_0$.





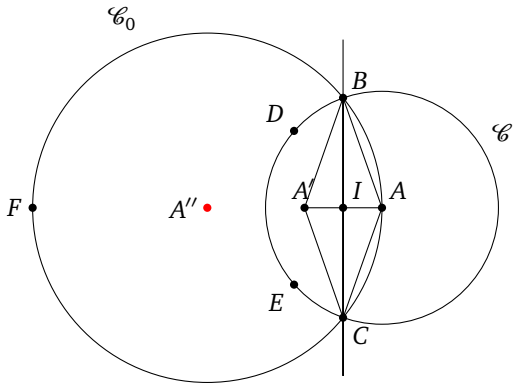
Remarque.
Notez, et ce sera important pour la suite, que si on connaît seulement trois points A, B, C formant un triangle isocèle, alors la construction précédente permet de retrouver le contour du cercle $\mathscr{C}_0$ passant par A, B, C et son centre.

5.2. Preuve

Dans une première étape, nous montrons que $i(A')$ est le centre de $\mathscr{C}_0$ où i est l'inversion de centre A et de cercle d'inversion $\mathscr{C}$.

- L'image de la droite (BC) par l'inversion est un cercle passant par B, C (qui sont invariants par i) et A (qui est le centre de i) : c'est donc $\mathscr{C}_0$.

- Notons I le milieu de $[AA']$: c'est aussi le milieu de $[BC]$. Notons F le point de $\mathscr{C}_0$ diamétralement opposé à A.
- L'image de I par l'inversion est F : en effet, d'une part $I \in (BC)$ donc $i(I)$ est dans l'image de (BC) qui est $\mathscr{C}_0$, d'autre part $i(I)$ est sur la demi-droite $[AI)$. Donc $AI \cdot AF = r^2$, où r désigne ici le rayon de $\mathscr{C}$.
- Notons $A'' = i(A')$. Alors $AA' \cdot AA'' = r^2$, mais comme $AA' = 2AI$, on a donc $2AI \cdot AA'' = r^2$. Avec l'égalité du point précédent on obtient $AA'' = AF/2$, donc A'' est le milieu d'un diamètre : c'est bien le centre de $\mathscr{C}_0$.

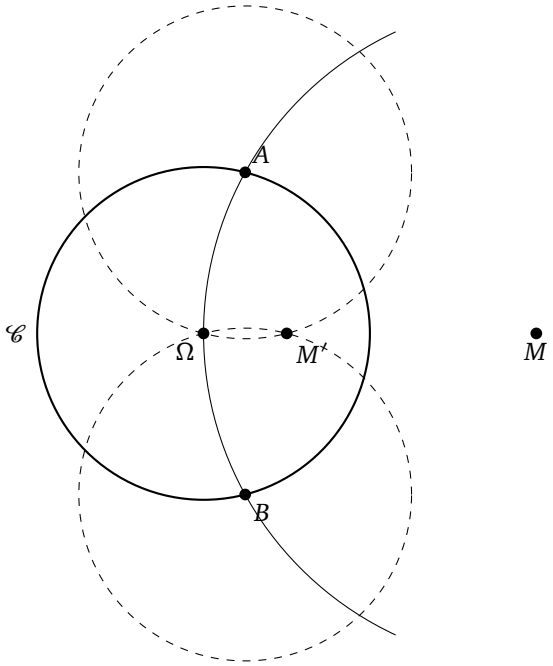


La dernière étape de notre construction est justifiée dans le paragraphe suivant.

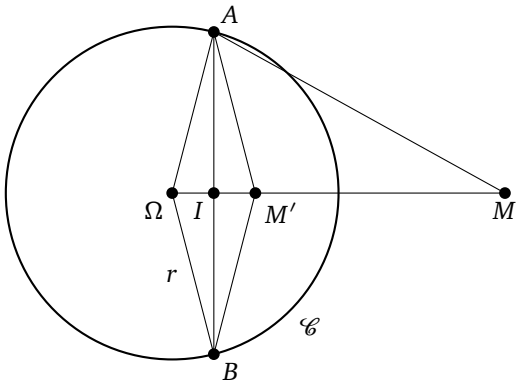
5.3. Construction de l'inverse d'un point au compas seul

Étant donné un cercle $\mathscr{C}$ de centre Ω et un point M extérieur à $\mathscr{C}$, nous allons construire, avec le compas seulement, l'image de M par l'inversion i de cercle $\mathscr{C}$.

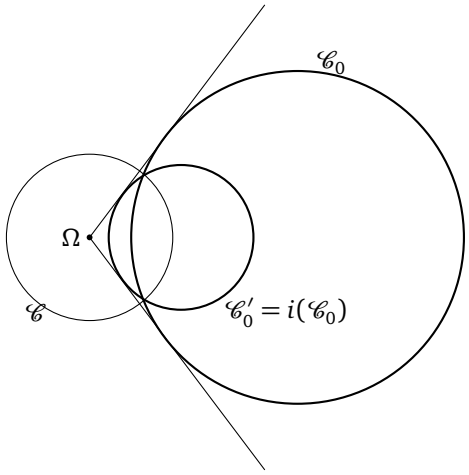
- Tracer le cercle $\mathscr{C}'$ de centre M passant par Ω. Il recoupe $\mathscr{C}$ en A et B.
- Tracer les cercles de centre A, puis de centre B, passant par Ω. Ils se coupent en Ω et en $M' = i(M)$.



Démonstration. Le théorème de Pythagore dans le triangle AIM donne $AM^2 - AI^2 = IM^2 = (\Omega M - I\Omega)^2$. Comme $AM = \Omega M$, alors $\Omega M^2 - AI^2 = \Omega M^2 + I\Omega^2 - 2\Omega M \cdot I\Omega$ et donc $\Omega M \cdot \Omega M' = \Omega M \cdot (2I\Omega) = I\Omega^2 + AI^2$. Par le théorème de Pythagore, cette fois dans le triangle $AI\Omega$, nous obtenons $\Omega M \cdot \Omega M' = A\Omega^2 = r^2$. Comme en plus M, M', Ω sont alignés (car sur la médiatrice de $[AB]$), alors $M' = i(M)$. □



Remarque.
Deux cercles dont l'un est l'image de l'autre par une inversion sont homothétiques, par une homothétie dont le centre est le centre de l'inversion. Par contre le rapport dépend des cercles considérés.



5.4. Théorème de Mohr-Masheroni

Théorème 5.
Toute construction possible à la règle et au compas est possible au compas seulement.

Bien sûr, il faut quand même exclure la tracé effectif des droites.
Un cercle est la donnée de deux points : son centre et un point de sa circonférence. Une droite est la donnée de deux points distincts.
Une ***construction à la règle et au compas***, c'est partir de plusieurs points sur une feuille ; vous pouvez maintenant tracer d'autres points, à partir de cercles et de droites en respectant les conditions suivantes :

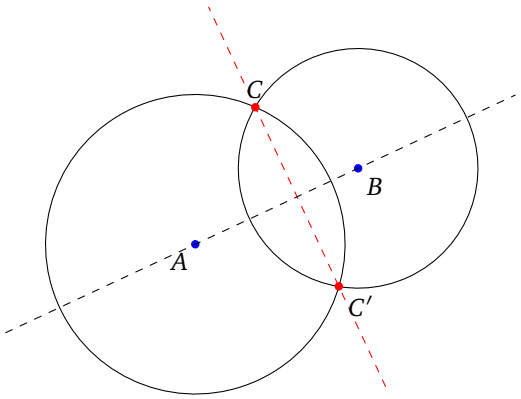
(i) vous pouvez tracer une droite entre deux points déjà construits,
(ii) vous pouvez tracer un cercle dont le centre est un point construit et qui passe par un autre point construit,
(iii) vous pouvez utiliser les points obtenus comme intersection de deux droites tracées, ou bien comme intersections d'une droite et d'un cercle tracé,
(iv) vous pouvez utiliser les points obtenus comme intersections de deux cercles tracés.

Une ***construction au compas seul***, c'est le même principe mais avec seulement les conditions (ii) et (iv) !

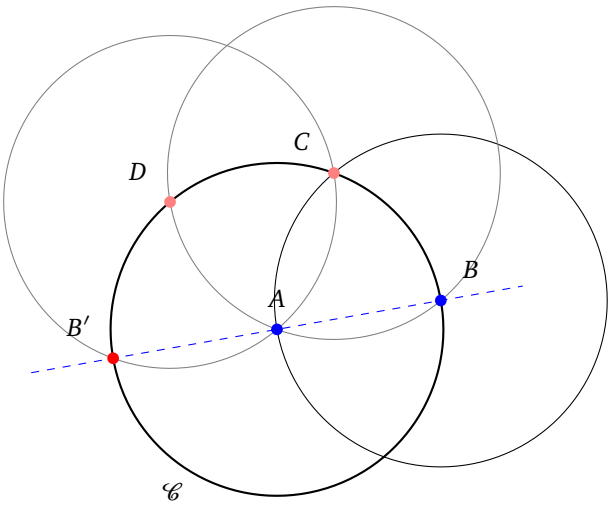
Avant d'étudier la preuve, commençons par une série de constructions très faciles avec une règle et un compas mais plus subtiles sans la règle.

Construction du symétrique de C par rapport à la droite (AB).

Pour cela, tracer le cercle centré en A passant par C et aussi le cercle centré en B passant par C (c'est deux fois la construction (ii)). Ces deux cercles s'intersectent en deux points C, C' (construction (iv)) : C' est le symétrique recherché.



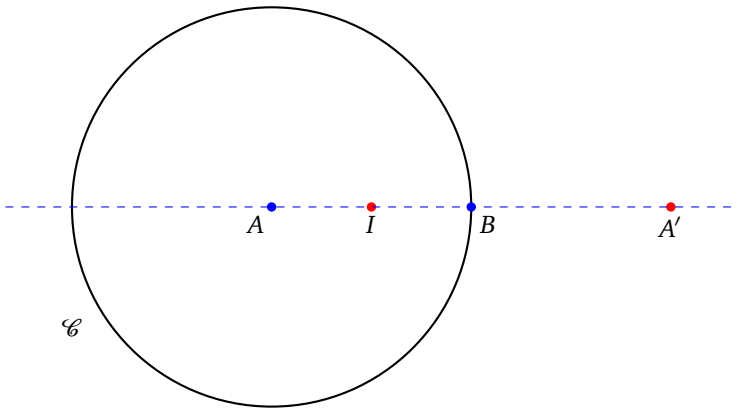
Construction du symétrique de B par rapport au point A.
La construction est basée sur le tracé de la rosace : tracer le cercle $\mathscr{C}$ centré en A passant par B, puis le cercle centré en B passant par A, ils se coupent par exemple en C. Tracer le cercle centré en C et passant par B, il recoupe $\mathscr{C}$ en D ; le cercle centré en D et passant par A recoupe $\mathscr{C}$ en B', qui est le symétrique de B par rapport à A.



Remarque.
Noter que pour l'instant nous n'avons pas le droit de relever la pointe du compas pour reporter une distance. On peut seulement tracer un cercle dont on connaît un centre et un point de sa circonférence.

Construction du milieu d'un segment $[AB]$.
Ce n'est pas facile du tout :

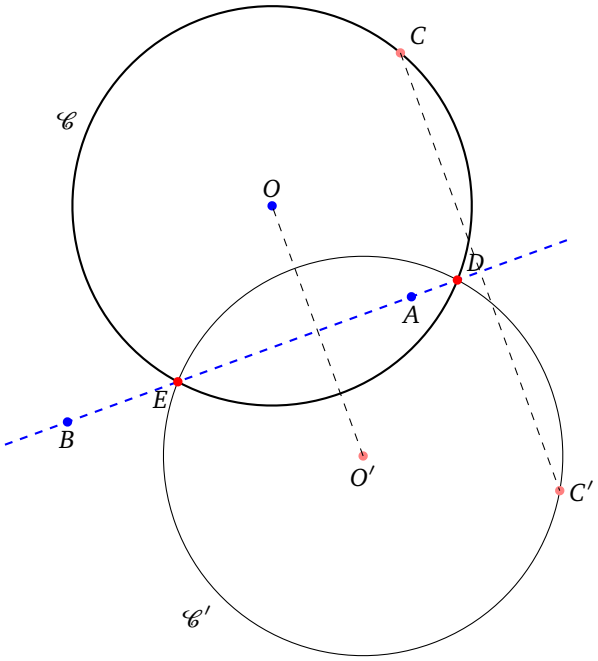
- Tracer le cercle $\mathscr{C}$ de centre A passant par B.
- Tracer, au compas seul, A', le symétrique de A par rapport au point B.
- Tracer, au compas seul, l'inverse $I = i(A')$ par l'inversion i de cercle $\mathscr{C}$.



Montrons que cette construction est correcte. Soit r le rayon du cercle $\mathscr{C}$. D'une part $AB = r$ donc $AA' = 2r$. D'autre part, par la définition de l'inversion, $AI \cdot AA' = r^2$. Ainsi $AI = \frac{r^2}{2r} = \frac{r}{2} = \frac{AB}{2}$, et donc I est bien le milieu de AB.

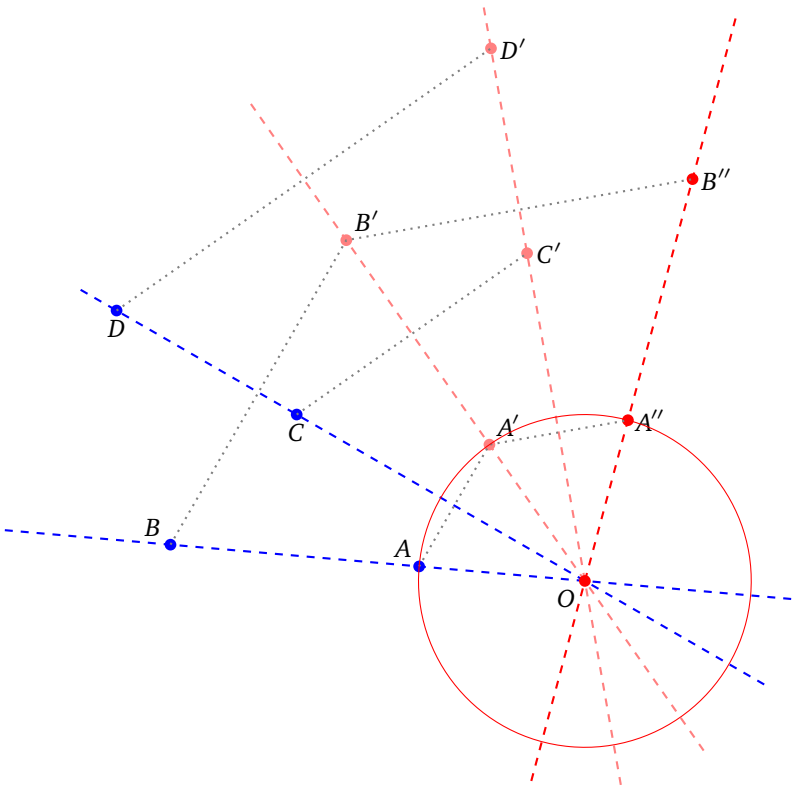
Passons maintenant à la preuve du théorème de Mohr-Masheroni. Comme les opérations (ii) et (iv) sont les seules autorisées, il nous faut montrer comment réaliser l'opération (iii) uniquement avec le compas.

Intersection entre un cercle et une droite au compas seul.
La droite est déterminée par deux points A et B. Le cercle $\mathscr{C}$ est donné par son centre O et un point C de sa circonférence. La construction est très simple : on trace le symétrique $\mathscr{C}'$ de $\mathscr{C}$ par rapport à la droite (AB), c'est le cercle centré en $O' = s_{(AB)}(O)$ passant par $C' = s_{(AB)}(C)$.
Les deux cercles $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ ont les mêmes points d'intersection que le cercle $\mathscr{C}$ et la droite (AB).



Intersection de deux droites au compas seul.
C'est la construction la plus difficile. Une première droite est donnée par les deux points A et B, une seconde par C et D. On suppose que les droites (AB) et (CD) ne sont pas perpendiculaires (à vous de chercher comment faire si elles le sont !).
On trace au compas seul le symétrique A' (resp. B') de A (resp. B) par rapport à (CD). On recommence : on trace le symétrique C' (resp. D') de C (resp. D) par rapport à $(A'B')$. Et encore une dernière fois : on trace le symétrique A'' (resp. B'') de A' (resp. B') par rapport à $(C'D')$.

Notons O le point d'intersection de (AB) et (CD) que l'on veut tracer. Les points A, A', A'' sont situés à la même distance de O, et de plus les distances AA' et $A'A''$ sont égales. Justification : A' est aussi l'image de A par la rotation d'angle 2α où α est l'angle entre les deux droites. Idem : pour A'' par rapport à A,...
Notons $\mathscr{C}_0$ le cercle passant par A, A' et A''. Alors d'une part son centre est O et d'autre part par la construction du problème de Napoléon et à l'aide de l'inversion, on sait construire au compas seul ce centre O et le cercle $\mathscr{C}_0$ (voir la remarque à la fin de la construction de Napoléon).

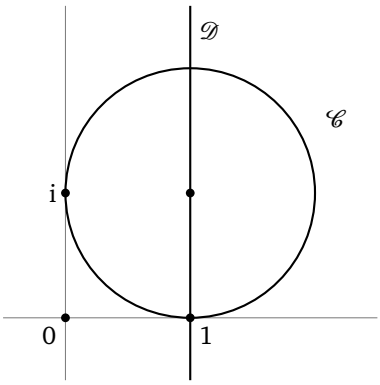


6. Exercices

6.1. L'inversion

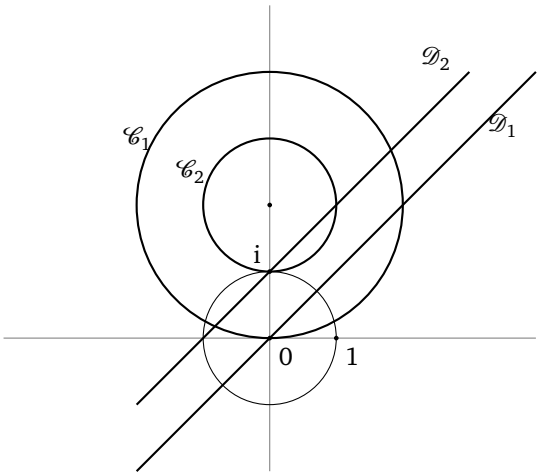
Exercice 1 (Cercle et droite)**.**

1. Donner l'équation complexe du cercle $\mathscr{C}$ de centre $2+\mathrm{i}$ et de rayon $\sqrt{5}$. Donner une paramétrisation polaire du cercle $\mathscr{C}'$ de centre $3\mathrm{i}$ et de rayon 1. Trouver l'intersection de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$.
2. Soit $\mathscr{C}$ le cercle de centre $1+\mathrm{i}$ et de rayon 1 et $\mathscr{D}$ la droite passant par les points d'affixe 1 et $1+\mathrm{i}$. Déterminer l'image de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$ par chacune des transformations suivantes :
   (a) $z \mapsto 2ze^{-\frac{\mathrm{i}\pi}{4}} + \mathrm{i}$;
   (b) $z \mapsto (1+\mathrm{i})\overline{(z+\mathrm{i})}$.



3. Donner l'équation complexe de la droite (AB) passant par les points d'affixe $\alpha \in \mathbb{C}$ et $\beta \in \mathbb{C}$.
4. Étant fixés $\omega \in \mathbb{C}^*$ et $k \in \mathbb{R}$, trouver l'équation complexe des droites perpendiculaires à la droite d'équation $\bar{\omega}z + \omega\bar{z} = k$.

Exercice 2 (Inversion)**.**
Soit l'inversion i de centre O et de rayon 1 définie par $i(z) = \frac{1}{\bar{z}}$. Déterminer les images, par i, de chacune des figures suivantes :



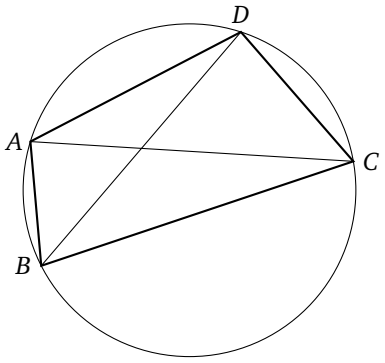
1. la droite $\mathscr{D}_1$ d'équation réelle $y = x$;
2. la droite $\mathscr{D}_2$ d'équation réelle $y = x + 1$;
3. le cercle $\mathscr{C}_1$ de centre $(0, 2)$ et de rayon 2 ;
4. le cercle $\mathscr{C}_2$ de centre $(0, 2)$ et de rayon 1.

Mêmes questions avec l'inversion $i(z) = 2\,\mathrm{i} + \frac{1}{\overline{z-2\,\mathrm{i}}}$.
Indications. Deux méthodes sont possibles : un calcul avec les équations complexes ou alors d'abord reconnaître (à l'aide du cours) la nature de l'image et la calculer.

Exercice 3 (Inversion et cocyclicité)**.**

1. Soient A, B, C, D quatre points d'affixe a, b, c, d. Montrer que A, B, C, D sont cocyliques ou alignés si et seulement si
$$\frac{\frac{d-a}{d-b}}{\frac{c-a}{c-b}} \in \mathbb{R}.$$
Indication. Utiliser le théorème de l'angle inscrit.
2. Soit i une inversion, et soient M, N deux points du plan distincts du centre de l'inversion. Montrer que $M, N, i(M), i(N)$ sont cocyliques ou alignés.
Indication. Choisir le repère de telle sorte que l'inversion s'écrive $i(z) = \frac{1}{\bar{z}}$.
3. **Application 1.** Soit i une inversion de centre Ω. Soient M, N deux points du plan (avec Ω, M, N distincts). Supposons connus et placés les quatre points distincts Ω, M, N et $i(M)$. Construire à la règle et au compas le point $i(N)$.
4. **Application 2.** Soit i une inversion de centre Ω. Soient M, $i(M)$ donnés (avec Ω, M, $i(M)$ distincts). Construire à la règle et au compas le cercle invariant par l'inversion i.
5. **Application 3.** Montrer que si un cercle contient un point et son inverse alors il est globalement invariant.

Exercice 4 (Théorème de Ptolémée)**.**
« Les sommets d'un quadrilatère convexe sont cocycliques si et seulement si la somme des produits des côtés opposés est égale au produit des diagonales. » En d'autres termes, en notant $ABCD$ un tel quadrilatère, ses sommets A, B, C, D sont cocycliques si et seulement si :
$$AB \times CD + AD \times CB = AC \times BD.$$



1. **Sens direct.** Supposons que A, B, C, D appartiennent à un même cercle. Soit I le point de $[AC]$ tel qu'on ait l'égalité des angles : $\widehat{ABI} = \widehat{CBD}$.
   (a) Montrer que les triangles CBD et IBA sont semblables (trouver une autre égalité d'angle) ; en déduire que $AB \times CD = IA \times BD$.
   (b) Montrer aussi que les triangles ABD et IBC sont semblables ; en déduire que $AD \times BC = IC \times BD$.
   (c) Conclure.
2. **Préliminaire à la réciproque.** Soit i une inversion de centre Ω et de rapport r^2. Soient M, N deux points du plan et $M' = i(M)$, $N' = i(N)$ leur image. Montrer la relation entre les distances :
$$M'N' = \frac{r^2 MN}{\Omega M \times \Omega N}.$$
   Indications. On pourra supposer que Ω est l'origine du plan, puis faire les calculs avec l'écriture complexe de i.
3. **Réciproque.** Soient A, B, C, D quatre points vérifiant $AB \times CD + AD \times CB = AC \times BD$. Soit i l'inversion de centre D et d'un rapport r^2 fixé. Soient $A' = i(A)$, $B' = i(B)$, $C' = i(C)$.
   (a) Calculer $A'B'$, $B'C'$ et $A'C'$ et montrer que $A'B' + B'C' = A'C'$. Qu'en déduire pour A', B', C' ?
   (b) En déduire que A, B, C, D sont cocycliques.

6.2. Homographie

Exercice 5 (Homographie et birapport)**.**
Soient A, B, C, D quatre points d'affixe a, b, c, d. Le *birapport* de ces quatre points est
$$[a : b : c : d] = \frac{\frac{d-a}{d-b}}{\frac{c-a}{c-b}}.$$

1. Montrer que les homographies préservent le birapport (c'est-à-dire : $[h(a) : h(b) : h(c) : h(d)] = [a : b : c : d]$, pour toute homographie h et tous quadruplets).
   Indication. Se ramener à l'étude de chacune des transformations $z \mapsto z + \alpha$, $z \mapsto \lambda \cdot z$, $z \mapsto \frac{1}{z}$.
2. En déduire que l'image d'un cercle-droite par une homographie est un cercle-droite.
   Indication. Utiliser le critère de cocylicité.
3. *Exemple.* Soit $h(z) = \frac{z-1}{z-i}$. Soit $\mathscr{C}$ le cercle de centre $1+i$ et de rayon 1. À l'aide de l'image de trois points, trouver l'image de $\mathscr{C}$.

Exercice 6 (Homographie et birapport (bis))**.**
Soient $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ distincts.

1. Montrer qu'il existe une unique homographie h telle que $h(a) = \infty$, $h(b) = 0$, $h(c) = 1$.
2. Montrer que $h(d) = [a : b : c : d]$.

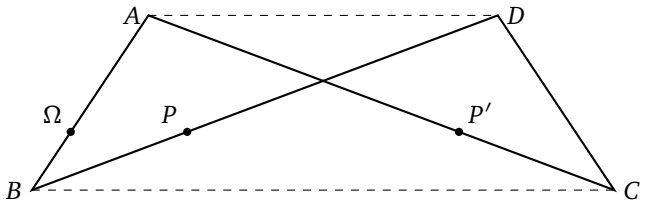
Exercice 7 (Homographies et matrices)**.**
Notons $\mathscr{H}$ l'ensemble des homographies définies par $h(z)=\frac{az+b}{cz+d}$ avec $a,b,c,d\in\mathbb{C}$ et $ad-bc\neq 0$. Notons $GL_2(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices $\left(\begin{smallmatrix}a & b\\ c & d\end{smallmatrix}\right)$ avec $a,b,c,d\in\mathbb{C}$ et $ad-bc\neq 0$.

1. Montrer que $(GL_2(\mathbb{C}),\times)$ est un groupe.
2. Montrer que $(\mathscr{H},\circ)$ est un groupe.
3. Soit $\Phi : GL_2(\mathbb{C})\longrightarrow\mathscr{H}$ l'application qui à $\left(\begin{smallmatrix}a & b\\ c & d\end{smallmatrix}\right)$ associe l'homographie h définie par $h(z)=\frac{az+b}{cz+d}$. Montrer que Φ définit un morphisme du groupe $(GL_2(\mathbb{C}),\times)$ vers le groupe $(\mathscr{H},\circ)$.
4. Calculer le noyau de Φ.

6.3. Dispositifs mécaniques

Exercice 8 (Inverseur de Hart)**.**
L'inverseur de Hart est un dispositif mécanique constitué de quatre tiges articulées avec $AB=CD$, $AC=BD$. Soient Ω,P,P' des points des tiges tels que : $\overrightarrow{B\Omega}=k\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BP}=k\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{CP'}=k\overrightarrow{CA}$ (avec $0<k<1$ fixé).

1. Montrer que le quadrilatère $ABCD$ est un trapèze dont les sommets sont cocycliques.
2. À l'aide du théorème de Ptolémée, calculer $AD\cdot BC$. En déduire une valeur de $\Omega P\cdot\Omega P'$. Montrer que P' est l'image de P par une inversion que l'on précisera.
3. En déduire un dispositif mécanique qui transforme un cercle en une droite.



Chapitre 3

La chaînette

Vidéo ■ partie 1. Le cosinus hyperbolique

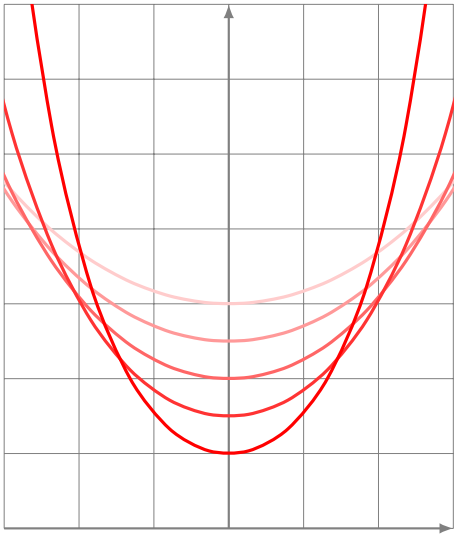
Vidéo ■ partie 2. Équation de la chaînette

Vidéo ■ partie 3. Longueur d'une chaînette

Introduction

La ***chaînette*** est le nom que porte la courbe obtenue en tenant une corde (ou un collier, un fil,...) par deux extrémités. Sans plus tarder voici l'équation d'une chaînette :

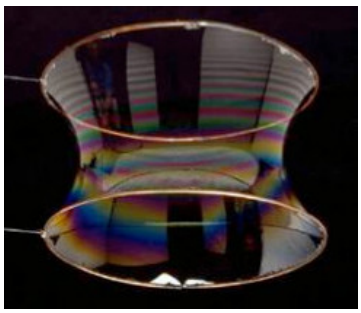
$$y = a \operatorname{ch}\left(\frac{x}{a}\right)$$



Ici «ch» désigne le cosinus hyperbolique, défini à partir de la fonction exponentielle : $y(x) = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$, nous y reviendrons.

Le paramètre a dépend de la chaînette : on peut écarter plus ou moins les mains. Ou, ce qui revient au même, si l'on garde les mains fixes, on peut prendre des cordes de différentes longueurs.

C'est donc une courbe que vous voyez tous les jours : la chaîne qui pend à votre cou ou le fil électrique entre deux pylônes. Mais on le retrouve dans des endroits plus surprenants : vous pouvez voir des chaînettes avec des films de savon. Trempez deux cercles métalliques parallèles dans de l'eau savonneuse. Il en sort une surface de révolution dont le profil est une chaînette. Enfin, si vous souhaitez faire une arche qui s'appuie sur deux piles alors la forme la plus stable est une chaînette renversée. Gaudi a beaucoup utilisé cette forme dans les bâtiments qu'il a construits.



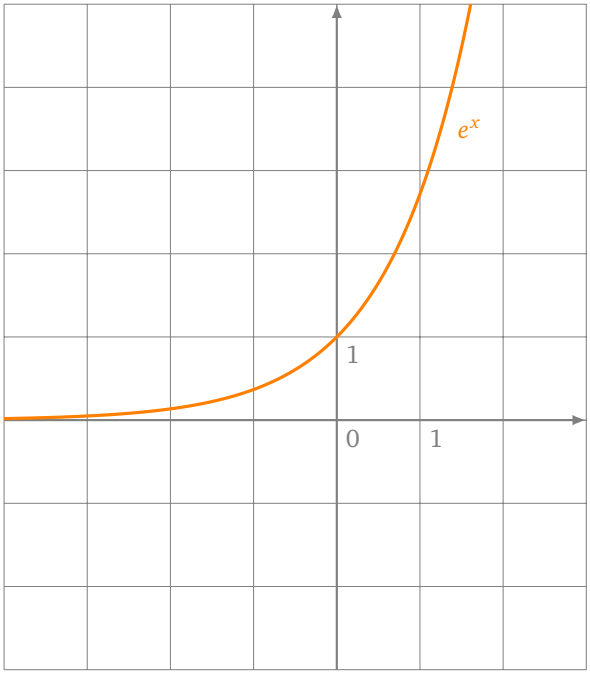
Pour finir sur un bateau, si une voile rectangulaire est maintenue par deux mats horizontaux et que le vent souffle perpendiculairement alors le profil de la voile est une chaînette.
Stop ! Place aux maths : nous allons expliquer comment calculer l'équation d'une chaînette.

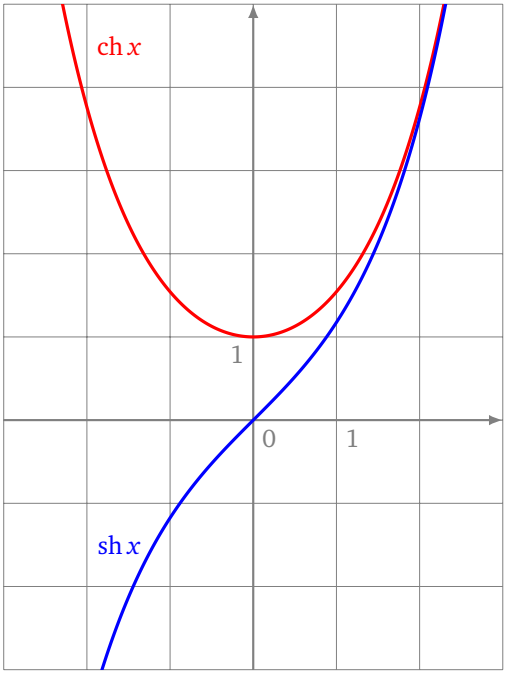
1. Le cosinus hyperbolique

1.1. Définition

Le *cosinus hyperbolique* et le *sinus hyperbolique* sont la partie paire et impaire de l'exponentielle :

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$





Voici quelques propriétés dont nous aurons besoin :

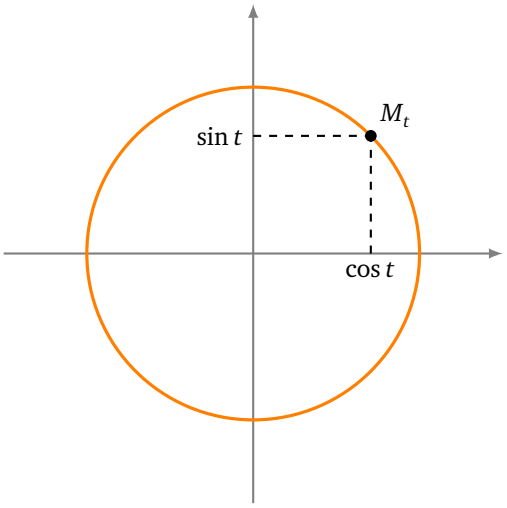
Proposition 1. *1.* $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$, *pour tout* $x \in \mathbb{R}$.

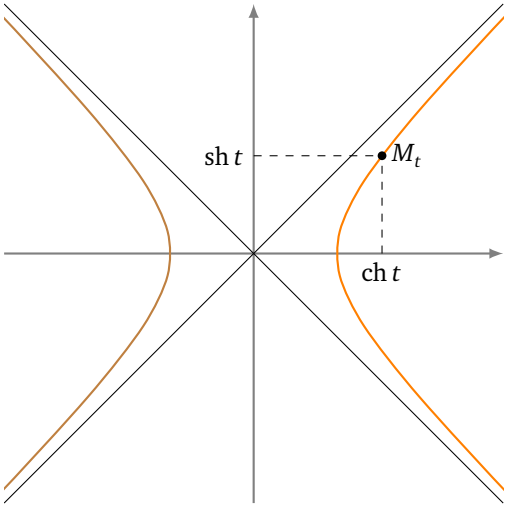
2. $\operatorname{ch}' x = \operatorname{sh} x$ *et* $\operatorname{sh}' x = \operatorname{ch} x$.

Remarque.
Le nom cosinus hyperbolique et sinus hyperbolique ne sont pas un hasard : souvenez-vous des formules d'Euler pour le cosinus et sinus classiques (dits aussi «circulaires») :

$$\cos x = \frac{e^{\mathrm{i}x} + e^{-\mathrm{i}x}}{2}, \qquad \sin x = \frac{e^{\mathrm{i}x} - e^{-\mathrm{i}x}}{2\,\mathrm{i}}.$$

L'analogie avec la définition de $\operatorname{ch} x$ et $\operatorname{sh} x$ justifie les termes «cosinus» et «sinus». Reste à justifier le terme «hyperbolique».





Si nous dessinons une courbe paramétrée par $(x(t) = \cos t, y(t) = \sin t)$ alors $x(t)^2+y(t)^2 = \cos^2 t+\sin^2 t = 1$. Donc nous avons affaire à un cercle (d'où le terme «circulaire»). Par contre si on dessine une courbe paramétrée par $(x(t) = \operatorname{ch} t, y(t) = \operatorname{sh} t)$. Alors $x(t)^2 - y(t)^2 = \operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = 1$. C'est l'équation d'une branche d'hyperbole !

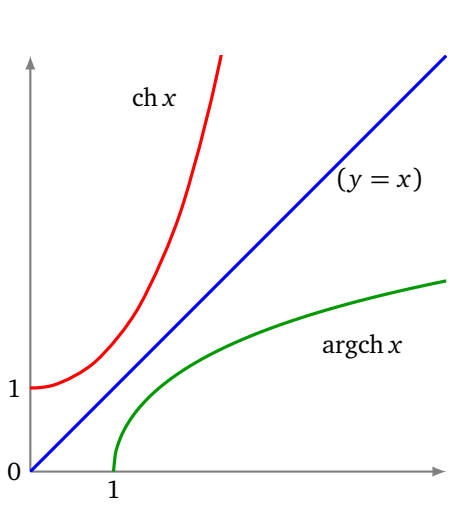
1.2. Fonctions réciproques

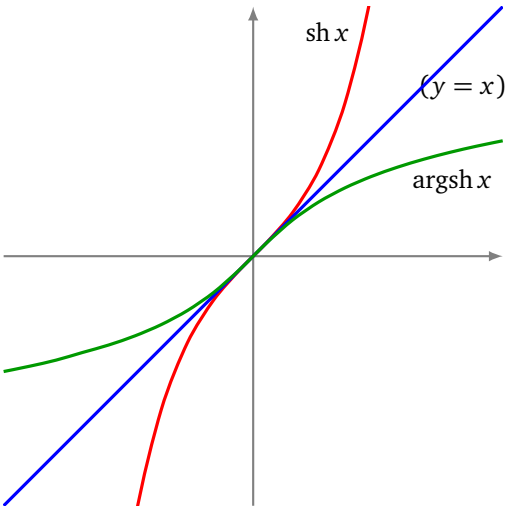
Proposition 2. • *La fonction* $x \mapsto \operatorname{ch} x$ *est une bijection de* $[0, +\infty[$ *dans* $[1, +\infty[$. *Sa bijection réciproque est notée* $\operatorname{Argch} x$. *Donc :*

$$\operatorname{ch}\big(\operatorname{Argch}(x)\big) = x \quad \forall x \in [1, +\infty[\qquad \operatorname{Argch}\big(\operatorname{ch}(x)\big) = x \quad \forall x \in [0, +\infty[$$

• *La fonction* $x \mapsto \operatorname{sh} x$ *est une bijection de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$. *Sa bijection réciproque est notée* $\operatorname{Argsh} x$. *Donc :*

$$\operatorname{sh}\big(\operatorname{Argsh}(x)\big) = x \qquad \operatorname{Argsh}\big(\operatorname{sh}(x)\big) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$





Pour résoudre une équation différentielle nous aurons besoin de la dérivée de $\operatorname{Argsh} x$.

Proposition 3.

Les fonctions $x \mapsto \operatorname{Argch} x$ *et* $x \mapsto \operatorname{Argsh} x$ *sont dérivables et*

$$\operatorname{Argch}' x = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \qquad \operatorname{Argsh}' x = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}.$$

1.3. Expression logarithmique

En fait, les fonctions hyperboliques inverses peuvent s'exprimer à l'aide des fonctions usuelles :

Proposition 4.

$$\operatorname{Argch} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right), \quad \text{pour } x \geqslant 1.$$
$$\operatorname{Argsh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right), \quad \text{pour } x \in \mathbb{R}.$$

1.4. Les démonstrations

Nous donnons les preuves des propositions précédentes pour la fonction cosinus hyperbolique. Les formules pour le sinus hyperbolique s'obtiennent de façon similaire.

Preuve de la proposition 1. 1. $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = \frac{1}{4}\big[(e^x+e^{-x})^2 - (e^x-e^{-x})^2\big] = \frac{1}{4}\big[(e^{2x}+2+e^{-2x}) - (e^{2x}-2+e^{-2x})\big] = 1.$

2. $\frac{d}{dx}(\operatorname{ch} x) = \frac{d}{dx}\frac{e^x+e^{-x}}{2} = \frac{e^x-e^{-x}}{2} = \operatorname{sh} x.$

□

Preuve de la proposition 2. Étudions la restriction de la fonction ch : $[0,+\infty[\to [1,+\infty[$.

- Comme $\operatorname{ch}' x = \operatorname{sh} x \geqslant 0$, pour $x \geqslant 0$, alors la restriction de la fonction ch est croissante. Elle est même strictement croissante (la dérivée ne s'annule qu'en 0).
- Comme $\operatorname{ch} 0 = 1$, que $\operatorname{ch} x \to +\infty$ lorsque $x \to +\infty$, alors par continuité et la stricte croissance, la restriction ch : $[0,+\infty[\to [1,+\infty[$ est une bijection.

Par définition, la bijection réciproque de cette restriction est $\operatorname{Argch} x : [1,+\infty[\to [0,+\infty[$ et vérifie :

$$\operatorname{Argch}\big(\operatorname{ch} x\big) = x \qquad \text{pour tout } x \in [0,+\infty[$$
$$\operatorname{ch}\big(\operatorname{Argch} x\big) = x \qquad \text{pour tout } x \in [1,+\infty[.$$

□

Preuve de la proposition 3. Comme la fonction $x \mapsto \operatorname{ch}' x$ ne s'annule pas sur $]0,+\infty[$ alors la fonction Argch est dérivable sur $]1,+\infty[$. On calcule la dérivée par dérivation de l'égalité $\operatorname{ch}(\operatorname{Argch} x) = x$:

$$\operatorname{Argch}' x \cdot \operatorname{sh}(\operatorname{Argch} x) = 1$$

puis on utilise l'identité $\operatorname{ch}^2 u - \operatorname{sh}^2 u = 1$ avec $u = \operatorname{Argch} x$:

$$\operatorname{Argch}' x = \frac{1}{\operatorname{sh}(\operatorname{Argch} x)} = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch}^2(\operatorname{Argch} x) - 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}.$$

□

Preuve de la proposition 4. Notons $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$.

$$f'(x) = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x + \sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = \operatorname{Argsh}' x.$$

Comme de plus $f(0) = \ln(1) = 0$ et $\operatorname{Argsh} 0 = 0$ (car $\operatorname{sh} 0 = 0$), on en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{Argsh} x$. □

1.5. Dérivée des physiciens, dérivée des mathématiciens

Deux notations pour la dérivée s'affrontent : celle du mathématicien $f'(x)$ et celle du physicien $\frac{df}{dx}$. Comparons-les. La dérivée de f en x est par définition la limite (si elle existe) du taux d'accroissement :

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{x+h-x},$$

lorsque h tend vers 0. Notons $h = dx$ et $df = f(x+h)-f(x) = f(x+dx)-f(x)$ alors le taux d'accroissement vaut $\frac{df}{dx}$ et comme dx est un nombre aussi petit que l'on veut (il est *infinitésimal*), on identifie ce quotient $\frac{df}{dx}$ avec la limite lorsque $dx \to 0$.
L'avantage de la notation des physiciens est que cela peut correspondre à un raisonnement physique. On peut raisonner sur des petits morceaux (de longueur dx petite mais pas nulle) et en déduire une relation avec des dérivées. C'est ce que nous ferons dans le paragraphe 2.3.
Autre avantage de cette notation, il est facile de retenir la formule :

$$\frac{df}{dx} = \frac{dy}{dx} \times \frac{df}{dy}.$$

Il s'agit juste de «simplifier» le numérateur avec le dénominateur.
Cette opération est justifiée, car il s'agit de la dérivée de la composée $f \circ y\,(x) = f\big(y(x)\big)$ qui est bien

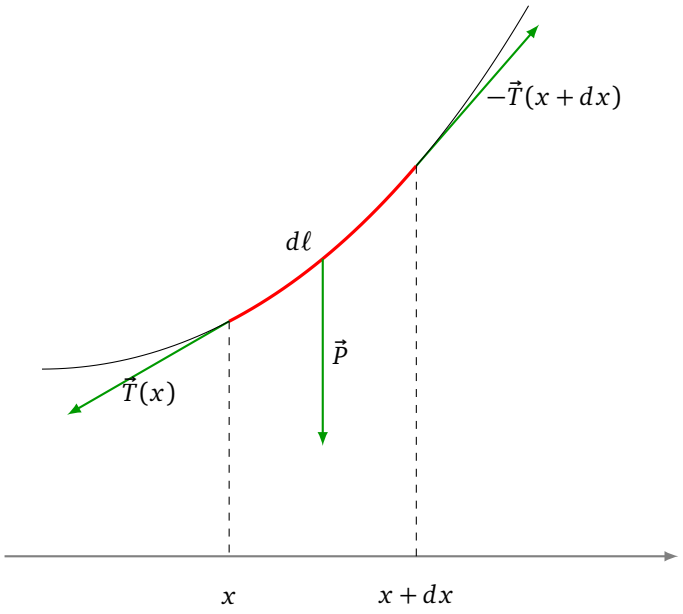
$$(f \circ y)'(x) = y'(x) \times f'\big(y(x)\big).$$

2. Équation de la chaînette

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé direct, $\vec{j}$ est un vecteur vertical dirigé vers le haut (c'est-à-dire opposé au champ de pesanteur).

2.1. Découpage infinitésimal de la chaînette

Nous découpons la chaînette en petits morceaux, chaque morceau étant compris entre les abscisses x et $x + dx$. Ici dx désigne donc un réel aussi petit que l'on veut. Nous noterons $d\ell$ la longueur de ce petit morceau de chaînette.
Trois forces s'appliquent à notre mini-bout de chaînette :



- ***Le poids $\vec{P}$.*** C'est une force verticale, proportionnelle à la masse du morceau. Si μ est la masse linéique (c'est-à-dire la masse que ferait un mètre de chaîne, exprimée en kg/m), la masse de notre petit bout est $\mu \cdot d\ell$. Si g dénote la constante de gravitation (avec $g \approx 9,81\ m/s^2$) alors le poids est $\vec{P} = -P\vec{j} = -\mu \cdot d\ell \cdot g \cdot \vec{j}$.
- ***La tension à gauche $\vec{T}(x)$.*** La tension à gauche, s'applique au point dont l'abscisse est x. Par un principe physique, les forces de tension de notre morceau à l'équilibre sont des forces tangentes à la chaînette.
- ***La tension à droite $-\vec{T}(x+dx)$.*** La tension à droite s'applique au point d'abscisse $x+dx$. Comme notre morceau est en équilibre elle s'oppose à la tension à gauche du morceau suivant compris entre $x+dx$ et $x+2dx$. La tension à droite de notre morceau est donc l'opposée de la tension à gauche du morceau suivant, cette force est donc $-\vec{T}(x+dx)$.

Une remarque : pour cette modélisation nous supposons que dx est le même pour tous les morceaux de chaîne. Par contre x varie, et aussi la longueur du morceau de chaîne entre les abscisses x et $x+dx$, qui devrait donc plutôt être notée $d\ell(x)$ au lieu de $d\ell$. Le poids d'un morceau de chaîne dépend lui aussi de x et devrait plutôt être noté $P(x)$.

2.2. Principe fondamental de la mécanique

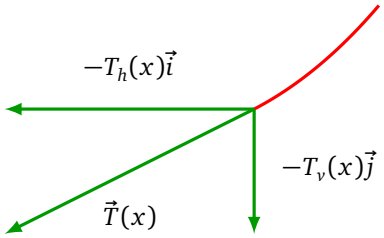
Le principe fondamental de la mécanique nous dit que, à l'équilibre, la somme des forces est nulle, donc :

$$\vec{P} + \vec{T}(x) - \vec{T}(x+dx) = \vec{0}. \tag{1}$$

Décomposons chaque force de tension, en une tension horizontale et une tension verticale :

$$\vec{T}(x) = -T_h(x)\vec{i} - T_v(x)\vec{j}.$$

La convention pour le choix des signes permet d'avoir des valeurs $T_h(x)$ et $T_v(x)$ positives.



Alors le principe fondamental de la mécanique devient :

$$-P\vec{j} - T_h(x)\vec{i} - T_v(x)\vec{j} - \left(-T_h(x+dx)\vec{i} - T_v(x+dx)\vec{j}\right) = \vec{0}.$$

Comme $(\vec{i}, \vec{j})$ est une base, nous reformulons le principe fondamental de la mécanique en deux équations, correspondant aux forces horizontales et aux forces verticales :

$$\begin{cases} T_h(x+dx) - T_h(x) &= 0 \\ T_v(x+dx) - T_v(x) - P &= 0 \end{cases} \tag{2}$$

2.3. Tension horizontale

La première équation du système (2) nous permet de montrer que la tension horizontale est constante.

Lemme 1.
La tension horizontale est indépendante de x :

$$T_h(x) = T_h.$$

Démonstration. En effet, fixons x, nous savons $T_h(x+dx)-T_h(x)=0$, donc le rapport

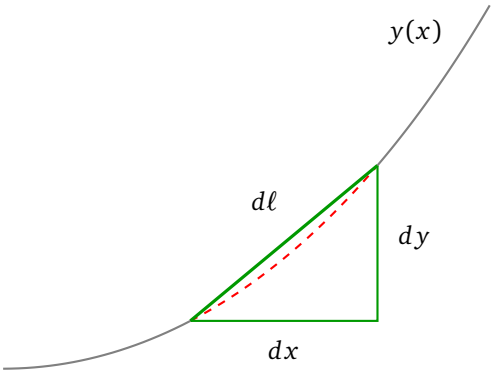
$$\frac{T_h(x+dx)-T_h(x)}{x+dx-x}=0.$$

Ceci est vrai quelque soit l'élément infinitésimal dx. Ce taux d'accroissement étant toujours nul, la limite lorsque dx tend vers 0 est nulle. Mais la limite est –par définition– la dérivée $T_h'(x)$. Bilan : $T_h'(x)=0$. La fonction $T_h(x)$ est donc une fonction constante comme nous l'avions annoncé. □

2.4. Tension verticale et poids

Nous noterons $y(x)$ l'équation de la chaînette. Nous considérons que chaque morceau infinitésimal de la chaîne est rectiligne, nous pouvons alors appliquer le théorème de Pythagore, dans un petit triangle rectangle dont l'hypoténuse est $d\ell$:

$$d\ell^2=dx^2+dy^2.$$



Cela conduit à :

$$\left(\frac{d\ell}{dx}\right)^2=1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2.$$

D'où

$$\frac{d\ell}{dx}=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Nous allons maintenant nous concentrer sur la deuxième équation du principe fondamental (2), le poids étant $P=\mu g\,d\ell$:

$$T_v(x+dx)-T_v(x)=\mu g\,d\ell.$$

Cela donne en divisant par dx :

$$\frac{T_v(x+dx)-T_v(x)}{dx}=\mu g\frac{d\ell}{dx}=\mu g\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

En terme de dérivée $\frac{dy}{dx}$ vaut à la limite $y'(x)$ et $\frac{T_v(x+dx)-T_v(x)}{dx}$ vaut à la limite $T_v'(x)$.
Nous avons donc montré :

$$T_v'(x)=\mu g\sqrt{1+y'(x)^2}. \tag{3}$$

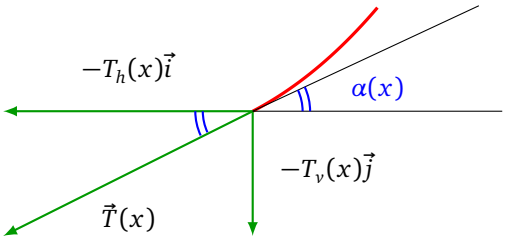
2.5. Calcul de l'équation

Théorème 1.
Une équation de la chaînette est

$$y(x)=a\,\mathrm{ch}\left(\frac{x}{a}\right)$$

où a est une constante qui vaut $a=\frac{T_h}{\mu g}$.

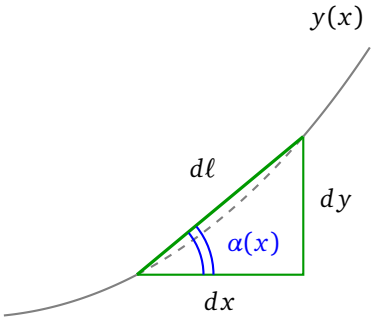
Démonstration. **1. Lien tension verticale/tension horizontale.**
Tout d'abord nous lions la tension horizontale T_h et la tension verticale T_v en fonction de l'angle que forme la chaînette avec l'horizontale. T dénote la norme de $\vec{T}$.



On obtient :

$$T_h(x) = T(x)\cos\alpha(x) \quad \text{et} \quad T_v(x) = T(x)\sin\alpha(x).$$

Ce qui conduit à $T_v(x) = T_h(x)\tan\alpha(x)$.
Maintenant, dans le triangle infinitésimal, nous avons aussi que $\tan\alpha(x) = \frac{dy}{dx} = y'(x)$.



Ce qui nous mène à la relation :

$$T_v(x) = T_h(x)\cdot y'(x).$$

2. Équations différentielles.
Nous savons que la tension horizontale est constante (lemme 1), donc en dérivant l'égalité précédente, nous avons

$$T_v'(x) = T_h \cdot y''(x).$$

Avec l'équation (3) nous écrivons

$$\mu g\sqrt{1+y'(x)^2} = T_h \cdot y''(x).$$

C'est une équation différentielle du second d'ordre :

$$y''(x) = \frac{\mu g}{T_h}\sqrt{1+y'(x)^2}. \tag{4}$$

Soit a la constante $a = \frac{T_h}{\mu g}$. Posons $z(x) = y'(x)$. Cela nous conduit à une équation différentielle du premier ordre $z'(x) = \frac{1}{a}\sqrt{1+z(x)^2}$ ou encore :

$$\frac{z'(x)}{\sqrt{1+z(x)^2}} = \frac{1}{a}.$$

3. Solutions de l'équation différentielle.
Une primitive de $\frac{z'(x)}{\sqrt{1+z(x)^2}}$ est $\operatorname{Argsh} z(x)$, donc

$$\operatorname{Argsh} z(x) = \frac{x}{a} + \alpha$$

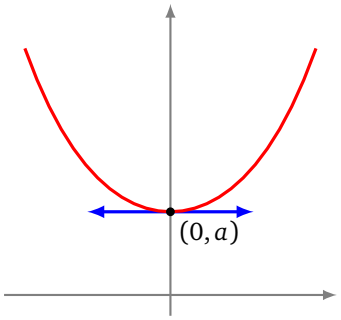
où α est une constante. En composant des deux côtés par le sinus hyperbolique :

$$y'(x) = z(x) = \operatorname{sh}\left(\frac{x}{a} + \alpha\right).$$

Une primitive de $\operatorname{sh} x$ étant $\operatorname{ch} x$, il ne reste plus qu'à intégrer :

$$y(x) = a \operatorname{ch}\left(\frac{x}{a} + \alpha\right) + \beta.$$

4. Choix des constantes.
Si l'on suppose que le point le plus bas de la chaînette a pour coordonnées $(0, a)$ alors $y(0) = a$ et $y'(0) = 0$. On a choisit $\alpha = 0$ et $\beta = 0$ pour les deux constantes.



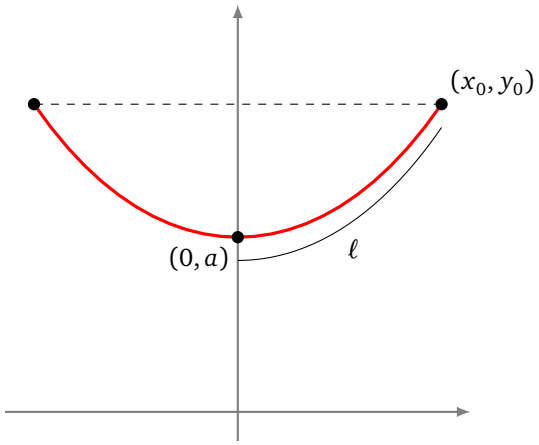
L'équation est alors $y(x) = a \operatorname{ch}\left(\frac{x}{a}\right)$. □

3. Longueur d'une chaînette

3.1. Longueur d'une chaînette

Proposition 5.
La longueur de la portion de la chaînette de paramètre a entre le point le plus bas $(0, a)$ et le point d'abscisse x_0 est :

$$\ell = a \operatorname{sh} \frac{x_0}{a}.$$



Démonstration. On rappelle l'équation de la chaînette : $y(x) = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$. Par définition la longueur vaut

$$\ell = \int_0^{x_0} \sqrt{1 + y'(x)^2} dx.$$

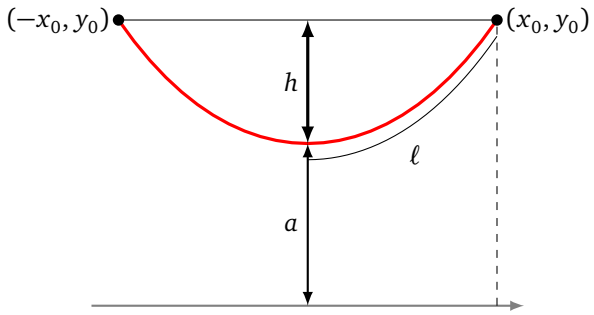
Ainsi :

$$\begin{aligned} \ell &= \int_0^{x_0} \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 \tfrac{x}{a}} dx \quad \text{car } \operatorname{ch}' \tfrac{x}{a} = \tfrac{1}{a} \operatorname{sh} \tfrac{x}{a} \\ &= \int_0^{x_0} \sqrt{\operatorname{ch}^2 \tfrac{x}{a}} dx \quad \text{car } 1 + \operatorname{sh}^2 u = \operatorname{ch}^2 u \\ &= \int_0^{x_0} \operatorname{ch} \tfrac{x}{a} dx = \left[a \operatorname{sh} \tfrac{x}{a}\right]_0^{x_0} \\ &= a \operatorname{sh} \tfrac{x_0}{a}. \end{aligned}$$

□

3.2. Calcul du paramètre

La chaînette ne dépend que du seul paramètre a. Ce paramètre a vaut $a = \frac{T_h}{\mu g}$ et est fonction de la masse μ du fil par unité de longueur, de la constante de gravitation g et de la tension horizontale T_h, qui elle dépend de l'écartement de deux points par lesquels passe la chaînette. Ce qui fait qu'il n'est pas facile de calculer a ainsi.
Fixons deux points, pour simplifier nous supposerons qu'ils sont à la même hauteur (même ordonnée). Prenons une chaînette de longueur 2ℓ fixée (et connue !). Nous allons calculer le paramètre a en fonction de la longueur 2ℓ et de la flèche h. La ***flèche*** est la hauteur h entre les deux points d'accroche et le point le plus bas de la chaînette.



Proposition 6.
Pour une chaînette de longueur 2ℓ et de flèche h alors

$$a = \frac{\ell^2 - h^2}{2h}.$$

Démonstration. Soient $(\pm x_0, y_0)$ les coordonnées des points d'accroche. L'équation de la chaînette étant $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}$, alors $y_0 = a \operatorname{ch} \frac{x_0}{a}$ qui vaut aussi $y_0 = a + h$.
Quant à la longueur elle vaut $2\ell = 2a \operatorname{sh}\left(\frac{x_0}{a}\right)$. Nous avons donc les équations :

$$\begin{cases} \ell &= a \operatorname{sh} \frac{x_0}{a} \\ h &= a \operatorname{ch} \frac{x_0}{a} - a \end{cases}$$

Nous obtenons donc :

$$\begin{aligned} \ell^2 - h^2 &= a^2 \operatorname{sh}^2 \tfrac{x_0}{a} - \left(a \operatorname{ch} \tfrac{x_0}{a} - a\right)^2 \\ &= a^2 \operatorname{sh}^2 \tfrac{x_0}{a} - a^2 \operatorname{ch}^2 \tfrac{x_0}{a} - a^2 + 2a^2 \operatorname{ch} \tfrac{x_0}{a} \\ &= 2a\left(-a + a \operatorname{ch} \tfrac{x_0}{a}\right) \qquad \text{car } \operatorname{ch}^2 u - \operatorname{sh}^2 u = 1 \\ &= 2ah. \end{aligned}$$

Ainsi $a = \dfrac{\ell^2 - h^2}{2h}$. □

3.3. Équation paramétrique

Proposition 7.
Une équation paramétrique de la chaînette est :

$$\begin{cases} x(t) &= a \ln t \\ y(t) &= \frac{a}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right) \end{cases}$$

pour $t > 0$.

Démonstration. Nous connaissons l'équation cartésienne $y = a\,\mathrm{ch}\left(\frac{x}{a}\right)$, qui est équivalente à $\mathrm{Argch}\left(\frac{y}{a}\right) = \frac{x}{a}$. Utilisons la forme logarithmique de la fonction Argch : $\mathrm{Argch}\,u = \ln\left(u + \sqrt{u^2-1}\right)$ (pour $u \geqslant 1$).
Nous obtenons :

$$\ln\left(\frac{y}{a} + \sqrt{\left(\frac{y}{a}\right)^2 - 1}\right) = \frac{x}{a}.$$

Nous cherchons maintenant une paramétrisation $(x(t), y(t))$ de la chaînette, posons $x(t) = a\ln(t)$ (ce qui est toujours possible car ln est une bijection de $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$). Alors l'équation précédente conduit (après simplification des ln) à :

$$\frac{y(t)}{a} + \sqrt{\left(\frac{y(t)}{a}\right)^2 - 1} = t,$$

ou encore

$$\sqrt{\left(\frac{y(t)}{a}\right)^2 - 1} = t - \frac{y(t)}{a}$$

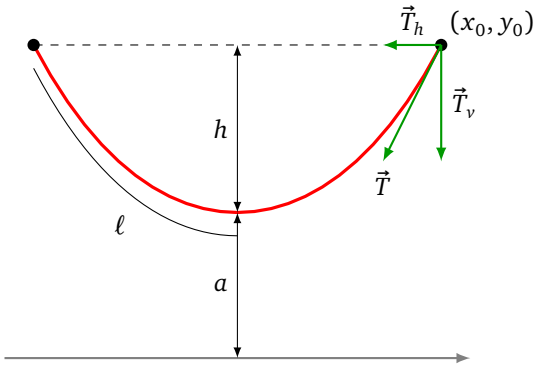
ce qui implique en élevant au carré :

$$\left(\frac{y(t)}{a}\right)^2 - 1 = t^2 + \left(\frac{y(t)}{a}\right)^2 - 2t\frac{y(t)}{a}$$

d'où $\frac{y(t)}{a} = \frac{t^2+1}{2t}$, et donc $y(t) = \frac{a}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right)$. □

3.4. Calcul de la tension

Proposition 8.
Nous pouvons calculer la tension en un point (x_0, y_0) de la chaînette. On note h la flèche correspondante et ℓ la longueur entre le point le plus bas et (x_0, y_0).



- *La* tension horizontale T_h *est constante et vaut :*
$$T_h = a\mu g = \frac{\ell^2 - h^2}{2h}\mu g.$$
- *Le* tension verticale *au point* (x_0, y_0) *est :*
$$T_v = T_h \cdot \mathrm{sh}\,\frac{x_0}{a} = T_h \cdot \frac{\ell}{a}.$$
- *La* tension totale *au point* (x_0, y_0) *est :*
$$T = \sqrt{T_h^2 + T_v^2} = T_h \cdot \mathrm{ch}\,\frac{x_0}{a} = T_h \cdot \frac{a+h}{a}.$$

La tension croît donc avec la hauteur du point.

Démonstration.
- On a vu dans le lemme 1 que la tension horizontale est constante. La formule $T_h = a\mu g$ provient de la définition même de la constante a (voir le théorème 1). Enfin, la dernière égalité est donnée par la proposition 5.

- Par la preuve du théorème 1 : $T_v(x_0) = T_h \cdot y'(x_0) = T_h \cdot \operatorname{sh} \frac{x_0}{a} = T_h \cdot \frac{\ell}{a}$.
- Le vecteur tension est $\vec{T}(x) = -T_h(x)\vec{i} - T_v(x)\vec{j}$, donc la norme au point d'abscisse x_0 est $T(x_0) = \|\vec{T}(x_0)\| = \sqrt{T_h^2 + T_v^2} = T_h\sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 \frac{x_0}{a}} = T_h \cdot \operatorname{ch} \frac{x_0}{a} = T_h \cdot \frac{a+h}{a}$. La dernière égalité est juste le fait que $y_0 = a + h = a \operatorname{ch} \frac{x_0}{a}$.

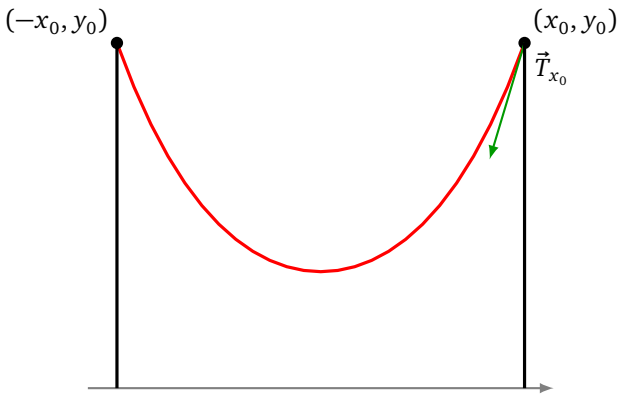
□

4. Exercices

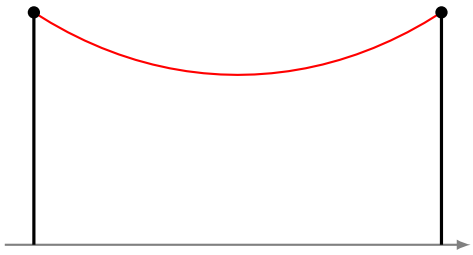
Exercice 1 (Tension minimale)**.**
On se donne deux poteaux distants d'une longueur $2x_0$ fixée et d'une hauteur suffisante. Parmi toutes les chaînettes passant par les sommets de ces poteaux, on cherche celle qui a les forces de tensions minimales. Nous savons que la tension totale (voir la proposition 8) vaut

$$T_x(a) = a\mu g \cdot \operatorname{ch} \frac{x}{a}.$$

Pour une chaînette donnée, la tension est donc maximale au point d'accroche (en $x = x_0$) car le cosinus hyperbolique est une fonction croissante sur $[0, +\infty[$. Pour un a fixé, la tension maximale est donc $T_{x_0}(a)$. Notre problème, x_0 étant fixé, est de trouver le a qui minimise $T_{x_0}(a)$.

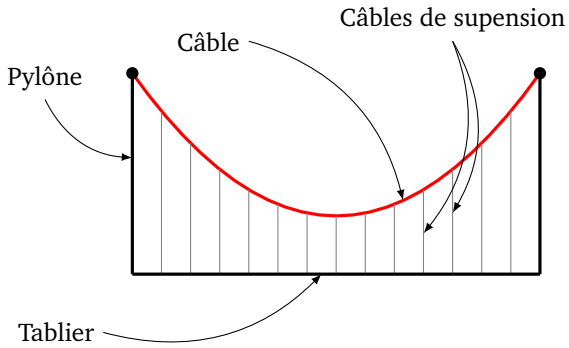


1. Considérations physiques : Que vaut la tension si la chaînette est rectiligne (la longueur de la chaînette est celle de l'écartement) ? Que vaut la tension si la longueur de la chaînette est infinie ?
2. Montrer que l'équation $\operatorname{ch} t = t \operatorname{sh} t$ est équivalente à l'équation $(t-1)e^{2t} = t + 1$. Montrer que, sur $[0, +\infty[$, cette équation a une unique solution τ. Une valeur approchée de τ est $\tau = 1,19968\ldots$
3. Montrer que la tension $T_{x_0}(a)$ est minimale en $a = \frac{x_0}{\tau}$.
4. Calculer la longueur correspondante, ainsi que la flèche.



Exercice 2 (Pont suspendu)**.**
Nous allons calculer que la courbe du câble d'un pont suspendu est une parabole.

Soit le tablier d'un pont de longueur L et de masse totale M. Un gros câble est accroché entre deux pylônes. À ce câble sont accrochés un grand nombre de petits câbles de suspension verticaux reliant le gros câble au tablier.



Nous allons calculer l'équation $y(x)$ du câble. On s'inspirera pour les premières questions des calculs sur la chaînette.

1. Quelles sont les forces qui s'appliquent à une portion de câble dont l'abscisse est entre x et $x + dx$?
2. Écrire l'équation du principe fondamental de la mécanique, appliqué à cette portion.
3. Montrer que la tension horizontale est indépendante de x.
4. Montrer que la tension verticale vérifie l'équation différentielle : $T_v'(x) = -T_h \cdot y''(x)$.
5. Dans toute la suite nous supposerons que la masse du câble est négligeable devant celle du tablier. Cela revient à supposer que le poids $P(x)$ du câble est négligeable devant la charge $C(x)$ du tablier. Nous posons donc $P(x) = 0$. Montrer que le principe fondamental de la mécanique s'écrit alors :
$$T_h \cdot y''(x) = \frac{M}{L} g.$$
6. Quelle est l'équation $y(x)$ du câble ?
7. Calculer une équation du câble du *Golden Bridge* (San Francisco). Le tablier mesure 1280 mètres de long, les pylônes ont une hauteur de 160 mètres (au-dessus du tablier) et le câble descend jusqu'au tablier (au milieu du pont).

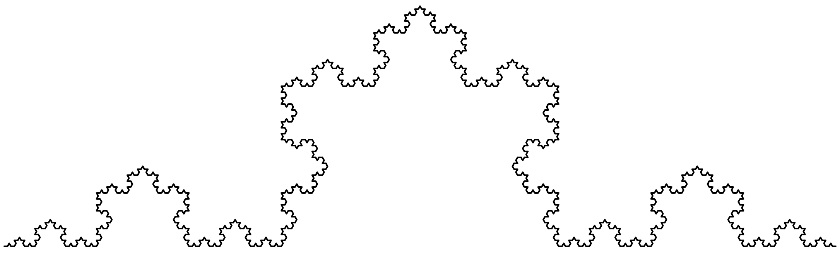
Auteurs du chapitre Arnaud Bodin
Relu par Laura Desideri.
Photos : fdecomite, soapbubble.dk, N. Jamal, G. Sivills, M. Gunn.

Chapitre 4

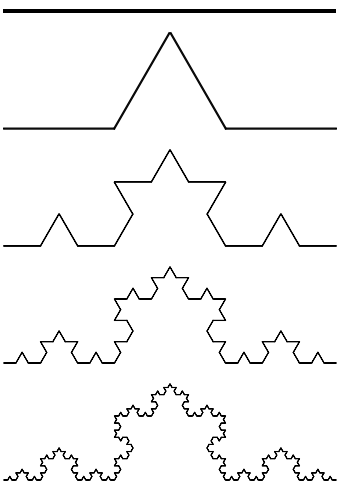
Systèmes itérés de fonctions

1. Introduction

Les fractales sont des objets géométriques qui présentent la particularité d'être « auto-similaires », c'est-à-dire que si l'on zoome sur n'importe quelle partie de l'objet, alors on retrouve presque l'objet initial. Il est plus simple de prendre un exemple : le flocon de Koch.



En inspectant cette figure, on s'aperçoit de cette propriété d'auto-similarité. Cela devient beaucoup plus clair si l'on sait comment cette figure a été construite.
On part d'un segment horizontal de longueur 1. Nous réduisons ce segment d'un facteur 3 et produisons 4 copies de ce petit segment. Ces 4 copies forment maintenant une dent. Partons de cette dent, effectuons une réduction d'un facteur 3, et produisons 4 petites dents... On itère le processus indéfiniment et la « limite » est notre flocon de Koch.



C'est un objet « fractal » différent des figures géométriques classiques. Il possède des propriétés surprenantes. Essayez par exemple de deviner quelle est sa longueur. Nous calculerons aussi sa dimension, et nous constaterons que ce n'est pas une courbe lisse (de dimension 1), ni une surface (de dimension 2), mais un

objet intermédiaire ! Ce qui est aussi fascinant, c'est qu'avec des transformations extrêmement simples on arrive à fabriquer des objets d'une complexité et d'une beauté infinies.
La seconde motivation de ce chapitre est la mise en pratique des transformations usuelles du plan : translations, réflexions, rotations, homothéties et plus généralement des transformations affines. L'usage des matrices facilite grandement la manipulation de ces applications.

2. Topologie de $\mathbb{R}^2$

2.1. Distance

Nous choisissons comme distance la ***distance euclidienne*** : si $P(x,y)$ et $Q(x',y')$ sont deux points du plan $\mathbb{R}^2$, alors la distance entre P et Q est

$$\|P-Q\| = \sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}.$$

C'est bien sûr la distance associée à la ***norme euclidienne*** :

$$\|(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2}.$$

Une ***isométrie*** est une application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ qui préserve les distances, c'est-à-dire :

$$\forall P,Q \in \mathbb{R}^2 \quad \|f(P)-f(Q)\| = \|P-Q\|.$$

Nous démontrerons plus loin que les translations, rotations et réflexions sont des isométries. Par contre, une homothétie de rapport $k \neq +1,-1$ n'est pas une isométrie.
Pour un réel $k \geqslant 0$, une application f est dite ***lipschitzienne de rapport*** k si

$$\forall P,Q \in \mathbb{R}^2 \quad \|f(P)-f(Q)\| \leqslant k\|P-Q\|.$$

Par exemple, une isométrie est lipschitzienne de rapport 1, une homothétie de rapport $k \geqslant 0$ est lipschitzienne de rapport k.
Les applications dont nous aurons besoin devront réduire les distances : une application f est dite ***contractante*** (ou est une ***contraction***) s'il existe $0 \leqslant k < 1$ telle que

$$\forall P,Q \in \mathbb{R}^2 \quad \|f(P)-f(Q)\| \leqslant k\|P-Q\|.$$

Autrement dit, une application est contractante si et seulement si elle est lipschitzienne pour un rapport $k < 1$.

2.2. Compacts de $\mathbb{R}^2$

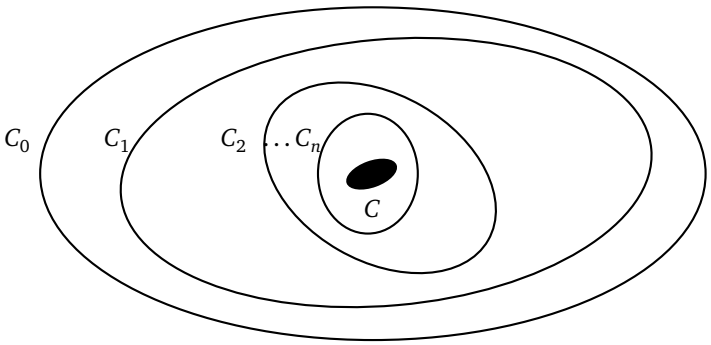
Voici des rappels.

- Un ensemble $F \subset \mathbb{R}^2$ est un ***fermé*** si, pour toute suite de points $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $P_n \in F$ (pour tout n) et $P_n \to Q$, on a $Q \in F$.
- Un ensemble $O \subset \mathbb{R}^2$ est un ***ouvert*** si $\mathbb{R}^2 \setminus O$ est un fermé.
- Un ensemble est ***borné*** s'il est inclus dans un disque. Autrement dit, $B \subset \mathbb{R}^2$ est borné s'il existe un $R > 0$ tel que $B \subset D(O,R)$, où on a noté $D(O,R)$ le disque fermé de centre O et de rayon R.
- Un ensemble sera appelé un ***compact*** s'il est fermé et borné.
- Exemple : $[a,b] \times [c,d]$ est un compact de $\mathbb{R}^2$.

Théorème 1.
Soit $\{C_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une famille de compacts non vides de $\mathbb{R}^2$. Si $C_0 \supset C_1 \supset C_2 \supset C_3 \supset \cdots$, alors

$$C = \bigcap_{n\geqslant 0} C_n$$

est un compact non vide de $\mathbb{R}^2$.



Remarquez que, vu l'emboîtement des compacts, alors on a en fait $C_0 \cap C_1 = C_1$, $C_0 \cap C_1 \cap C_2 = C_2, \ldots$ Et donc, en d'autres termes, le théorème affirme qu'une famille de compacts emboîtés tend vers un compact.

Voici le résultat fondamental concernant les fonctions continues sur les ensembles compacts. Le premier point est pour une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}$, le second point est sa version pour une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}^2$.

Théorème 2.

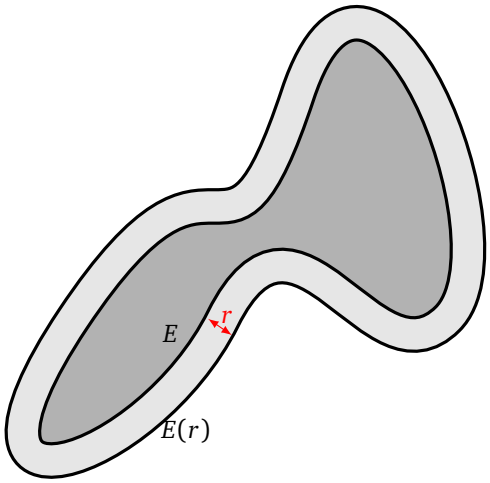
1. *Une fonction continue sur un compact est bornée et atteint ses bornes. Autrement dit, si $C \subset \mathbb{R}^2$ est un ensemble compact et $f : C \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, alors :*
   - *d'une part la fonction est bornée,*
   - *et d'autre part le maximum et le minimum de f sont atteints en des points de C.*
2. *Soit $C \subset \mathbb{R}^2$ un ensemble compact et soit $f : C \to \mathbb{R}^2$ une fonction continue. Alors $f(C)$ est un ensemble compact de $\mathbb{R}^2$.*

2.3. Distance de Hausdorff

Pour $E \subset \mathbb{R}^2$ et $r \geqslant 0$, notons

$$E(r) = \left\{P \in \mathbb{R}^2 \mid \|P - Q\| \leqslant r \text{ pour un } Q \in E\right\}$$

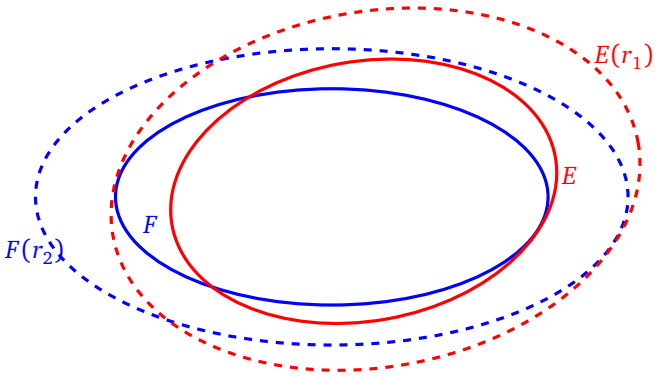
le ***r-voisinage*** de E. C'est l'ensemble des points situés dans E ou à une distance inférieure à r de E. Sur la figure ci-dessous, E est l'ensemble gris foncé, alors que $E(r)$ est l'ensemble des points en gris clair et gris foncé.



La ***distance de Hausdorff*** entre deux ensembles $E, F \subset \mathbb{R}^2$ est

$$\mathrm{dist}_H(E,F) = \inf\{r \geqslant 0 \mid F \subset E(r) \text{ et } E \subset F(r)\}.$$

C'est donc la plus petite valeur de r telle que F est inclus dans le r-voisinage de E, et E dans le r-voisinage de F.
Sur le dessin suivant, on considère E et F deux ellipses (avec les points intérieurs). On a trouvé le plus petit r_1 tel que $F \subset E(r_1)$, c'est-à-dire que l'on a fait grossir l'ellipse pleine E jusqu'à ce qu'elle contienne F. Et r_2 est le plus petit réel tel que $E \subset F(r_2)$. La distance de Hausdorff entre E et F est le minimum entre r_1 et r_2.



Cela n'a rien à voir avec la distance usuelle entre deux ensembles (le distance la plus courte pour aller de l'un à l'autre).

Proposition 1.
Sur l'ensemble $\mathscr{C}$ de tous les compacts de $\mathbb{R}^2$, $dist_H$ définit une distance. Autrement dit, pour tous $E, F, G \in \mathscr{C}$:

1. *$dist_H(E,F) = 0$ si et seulement si $E = F$,*
2. *$dist_H(E,F) = dist_H(F,E)$,*
3. *$dist_H(E,G) \leqslant dist_H(E,F) + dist_H(F,G)$.*

Démonstration. Pour la première propriété : si $E = F$, alors $E \subset F(0)$ (comme F est une partie fermée, $F(0) = F$ est le 0-voisinage de F) et $F \subset E(0)$, donc $\mathrm{dist}_H(E,F) = 0$. Réciproquement, supposons que

$E \neq F$ et montrons que $\text{dist}_H(E,F) > 0$. Comme $E \neq F$, supposons par exemple que F n'est pas inclus dans E, c'est-à-dire qu'il existe $P \in F$ tel que $P \notin E$. Si l'on note r la distance entre P et E (ici il s'agit de la distance usuelle entre un point et un ensemble : $d(P,E) = \inf\{\|P-Q\| \mid Q \in E\}$), alors $P \notin E(\frac{r}{2})$ et donc $\text{dist}_H(E,F) \geqslant \frac{r}{2} > 0$.
La deuxième propriété est évidente, et la troisième se déduit de l'inégalité triangulaire pour la distance entre deux points (voir l'exercice 2). □

3. Attracteurs

Soient $f_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ des fonctions, $i = 1, \ldots, \ell$. Soit $E \subset \mathbb{R}^2$ un ensemble. Rappelons que l'***image directe*** de E par f_i est

$$f_i(E) = \big\{f_i(x,y) \mid (x,y) \in E\big\}.$$

Nous allons généraliser cette notion à une famille de fonctions. L'***image directe*** de la famille $\mathbf{f} = \{f_i\}_{i=1,\ldots,\ell}$ est :

$$\mathbf{f}(E) = \bigcup_{i=1}^{\ell} f_i(E).$$

Si E est une partie compacte et que les f_i sont continues, alors $f_i(E)$ et $\mathbf{f}(E)$ sont aussi des parties compactes de $\mathbb{R}^2$. On note $f_i^{\,2}(E) = f_i(f_i(E))$, $f_i^{\,3}(E) = f_i(f_i(f_i(E)))$,... et plus généralement $f_i^{\,k+1}(E) = f_i\big(f_i^{\,k}(E)\big)$. De même, pour notre famille, on définit par récurrence $\mathbf{f}^{k+1}(E) = \mathbf{f}\big(\mathbf{f}^k(E)\big)$.

3.1. Le théorème d'attraction

Théorème 3.
Soit $f_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $i = 1, \ldots, \ell$, une famille de contractions. Alors il existe un unique compact non vide $C \subset \mathbb{R}^2$ qui est invariant par la famille $\mathbf{f} = \{f_i\}$:

$$C = \mathbf{f}(C),$$

c'est-à-dire

$$C = \bigcup_{i=1}^{\ell} f_i(C).$$

De plus, pour toute partie compacte non vide $E \subset \mathbb{R}^2$ telle que $\mathbf{f}(E) \subset E$ (c'est-à-dire $f_i(E) \subset E$, $i = 1, \ldots, \ell$), la suite des itérés $\mathbf{f}^k(E)$ converge vers C :

$$C = \bigcap_{k=1}^{+\infty} \mathbf{f}^k(E).$$

L'ensemble C obtenu est l'***attracteur*** de la famille $\mathbf{f} = \{f_i\}$.

Remarque.

- La première partie de ce théorème est un résultat théorique d'existence et d'unicité ; la seconde partie est un résultat pratique qui permet de calculer l'attracteur.
- Remarquez que, comme les ensembles $\mathbf{f}^k(E)$ vont être emboîtés, alors prendre cette intersection infinie n'est juste qu'une façon rigoureuse d'écrire la limite de $\mathbf{f}^k(E)$ quand $k \to +\infty$.
- Si les f_i ne sont pas des contractions, le théorème n'est plus valide. Par exemple, imaginez que les f_i soient des translations.

Il existe une version améliorée de la deuxième partie du théorème d'attraction. Dans cet énoncé, on se débarrasse de l'hypothèse $\mathbf{f}(E) \subset E$: ainsi E est une partie compacte non vide quelconque.

Théorème 4.
Avec les notations du théorème 3 : soit E une partie compacte non vide de $\mathbb{R}^2$. Alors la suite des itérés $\mathbf{f}^k(E)$ converge vers C :

$$C = \lim_{k\to+\infty} \mathbf{f}^k(E).$$

Remarque.

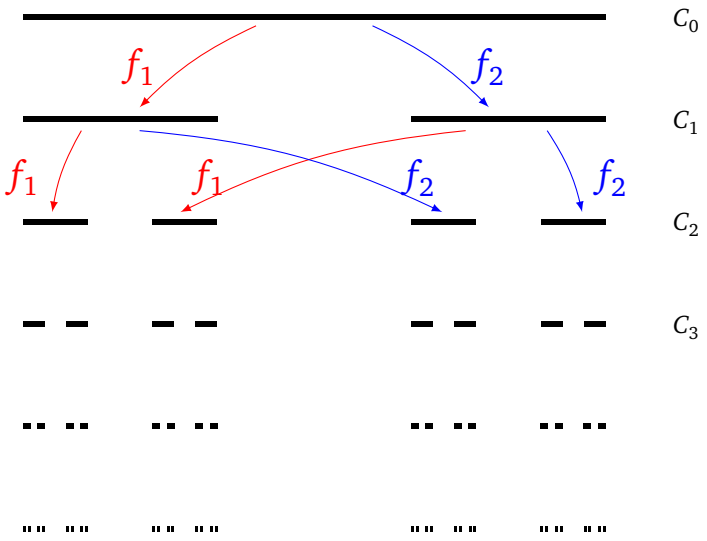
- Nous admettons ce théorème, qui est en fait un résultat vrai dans le cadre général des espaces complets.
- On peut prendre comme ensemble E un seul point ! C'est ce que nous ferons dans la section 9.2 pour tracer efficacement nos fractales.
- Vous connaissez déjà ce théorème dans sa version simple. En effet, si l'on considère une famille composée d'une seule fonction contractante $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, alors on sait que notre fonction admet un unique point fixe $c \in \mathbb{R}$. Notre attracteur est ici $C = \{c\}$. De plus c s'obtient comme la limite d'une suite récurrente : partant de n'importe quel $x_0 \in \mathbb{R}$, la suite (x_k) définie par $x_k = f(x_{k-1})$ (autrement dit $x_k = f^k(x_0)$) converge vers c.

3.2. L'ensemble de Cantor

Nous illustrons ce théorème par un exemple simple, non pas du plan, mais de la droite. Considérons les deux fonctions

$$f_1(x) = \frac{1}{3}x, \qquad f_2(x) = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}x.$$

La famille $\mathbf{f} = \{f_1, f_2\}$ est constituée d'applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ contractantes (elles sont toutes deux lipschitziennes de rapport $k = \frac{1}{3}$).



Soit C_0 le segment $[0,1] \subset \mathbb{R}$. Alors $f_1(C_0) = [0, \frac{1}{3}]$ et $f_2(C_0) = [\frac{2}{3}, 1]$. Donc $C_1 = \mathbf{f}(C_0) = f_1(C_0) \cup f_2(C_0) = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$. Noter que $\mathbf{f}(C_0) \subset C_0$. Au cran suivant : $f_1(C_1) = [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{3}{9}]$ et $f_2(C_1) = [\frac{6}{9}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, \frac{9}{9}]$. Donc $C_2 = \mathbf{f}(C_1) = f_1(C_1) \cup f_2(C_1)$ est l'union de 4 segments. On itère le processus : $C_n = \mathbf{f}(C_{n-1})$ est l'union de 2^n segments, chaque segment étant de longueur $\frac{1}{3^n}$.
Une autre façon de décrire le processus est que, à chaque étape, on divise chaque segment en trois et on retire celui du milieu. L'attracteur C obtenu est l'*ensemble de Cantor*, appelé aussi joliment les *poussières de Cantor*. L'ensemble obtenu n'est pas vide ; il est même non dénombrable !

3.3. Preuve

Passons à la preuve du théorème 3 d'attraction.

Existence de l'attracteur. Comme les f_i sont des contractions, il existe un disque fermé $D = D(O,r)$ (centré à l'origine O et de rayon r assez grand) tel que $f_i(D) \subset D$ pour tout $i = 1,\dots,\ell$. En effet, en notant k_i le rapport de contraction de f_i et $a_i = \|f_i(O)\|$ pour tout $i = 1,\dots,\ell$, puis $k = \max_{i=1,\dots,\ell} k_i$ et $a = \max_{i=1,\dots,\ell} a_i$, on a $0 \leqslant k < 1$ et $a \geqslant 0$. Puisque f_i est une contraction, on en déduit que, pour tout $x \in D$,

$$\|f_i(x) - f_i(O)\| \leqslant k_i\|x\| \leqslant kr \quad \text{et donc} \quad \|f_i(x)\| \leqslant kr + a.$$

Ainsi,

$$\text{si} \quad r \geqslant \frac{a}{1-k}, \quad \text{alors} \quad \|f_i(x)\| \leqslant r.$$

En d'autres termes, $\mathbf{f}(D) \subset D$. En composant par $\mathbf{f}$, cela implique $\mathbf{f}(\mathbf{f}(D)) \subset \mathbf{f}(D)$, donc $\mathbf{f}^2(D) \subset \mathbf{f}^1(D)$ et par récurrence $\mathbf{f}^{k+1}(D) \subset \mathbf{f}^k(D)$.

L'ensemble de départ D est un fermé borné de $\mathbb{R}^2$ donc un compact. Les applications f_i sont contractantes donc continues, ainsi les $f_i(D)$ sont des compacts et $\mathbf{f}(D)$ également, de même pour $\mathbf{f}^k(D)$. Donc $\left(\mathbf{f}^k(D)\right)_k$ est une suite de compacts non vides, décroissante pour l'inclusion. Alors $C = \bigcap_{k=1}^{+\infty} \mathbf{f}^k(D)$ est un ensemble compact non vide d'après le théorème 1. Noter encore une fois que, comme les ensembles $\mathbf{f}^k(D)$ sont emboîtés, prendre cette intersection infinie n'est juste qu'une façon rigoureuse d'écrire la limite de $\mathbf{f}^k(D)$ quand $k \to +\infty$.

Nous allons maintenant montrer que C est un ensemble fixé par nos transformations, c'est-à-dire $\mathbf{f}(C) = C$. Notons $D_k = \mathbf{f}^k(D)$, autrement dit $D_0 = D$ et $D_{k+1} = \mathbf{f}(D_k)$. Ainsi (D_k) est notre suite de compacts emboîtés et $\bigcap_{k=1}^{+\infty} D_k = C$.

- Preuve de $\mathbf{f}(C) \subset C$. Soit $y \in \mathbf{f}(C)$. Alors
$$y \in \mathbf{f}\left(\bigcap_{k=1}^{+\infty} D_k\right) \quad \text{donc, pour tout } k \geqslant 1,\ y \in \mathbf{f}(D_k).$$
Ainsi
$$y \in \bigcap_{k=1}^{+\infty} \mathbf{f}(D_k) = \bigcap_{k=1}^{+\infty} D_{k+1} = \bigcap_{k=2}^{+\infty} D_k = \bigcap_{k=1}^{+\infty} D_k = C.$$
- Preuve de $C \subset \mathbf{f}(C)$. Soit $y \in C$. Alors, pour tout $k \geqslant 1$, $y \in D_k$. Donc, pour tout $k \geqslant 0$, $y \in D_{k+1}$. Ainsi, pour tout $k \geqslant 0$, $y \in \mathbf{f}(D_k)$.
Pour chaque $k \geqslant 0$, il existe donc $x_k \in D_k$ tel que $y = f_i(x_k)$, pour un certain $1 \leqslant i \leqslant \ell$ (ce i dépend de k). Les x_k sont tous dans le compact D. Donc on peut extraire une sous-suite $(x_{\varphi(k)})$ qui converge vers $x_\infty \in D$. Il n'est pas dur de montrer qu'en fait x_∞ appartient à C. En effet, les $x_{\varphi(k)}$ sont dans le fermé D_{k_0} pour tout $k \geqslant k_0 \geqslant 1$, donc la limite x_∞ est aussi dans D_{k_0}. Comme c'est vrai quel que soit k_0, alors $x_\infty \in C$.
Pour chaque k, il n'existe qu'un nombre fini de choix possibles pour le i tel que $y = f_i(x_{\varphi(k)})$. Quitte à extraire de nouveau une sous-suite de $(x_{\varphi(k)})$, on peut supposer que $y = f_{i_0}(x_{\varphi(k)})$ pour tout $k \geqslant 0$, pour un certain $1 \leqslant i_0 \leqslant \ell$. La fonction f_{i_0} est une contraction donc continue, ainsi à la limite on a encore $y = f_{i_0}(x_\infty)$. Ainsi $y \in f_{i_0}(C)$ et donc $y \in \mathbf{f}(C)$.

Conclusion : $\mathbf{f}(C) = C$.

Ce que nous venons de faire pour le disque D fonctionne pour n'importe quelle partie compacte non vide E telle que $\mathbf{f}(E) \subset E$. Nous avons donc aussi prouvé la seconde partie du théorème.

Unicité. Nous allons utiliser la distance de Hausdorff introduite plus haut (paragraphe 2.3). En effet, si f_i est contractante de rapport $k_i < 1$ alors, pour deux compacts $C, C' \subset \mathbb{R}^2$, nous avons $\text{dist}_H(f_i(C), f_i(C')) \leqslant k_i \cdot \text{dist}_H(C, C')$ (voir l'exercice 2). En notant encore $k = \max_{i=1,\dots,\ell} k_i$, on a donc $0 \leqslant k < 1$ et $\text{dist}_H(\mathbf{f}(C), \mathbf{f}(C')) \leqslant k \cdot \text{dist}_H(C, C')$.

Supposons que C et C' soient deux compacts invariants : $\mathbf{f}(C) = C$ et $\mathbf{f}(C') = C'$. Alors $\text{dist}_H(C, C') \leqslant k \cdot \text{dist}_H(C, C')$. Comme $k < 1$, alors $\text{dist}_H(C, C') = 0$ et donc, par la proposition 1, $C = C'$.

4. Isométries, similitudes

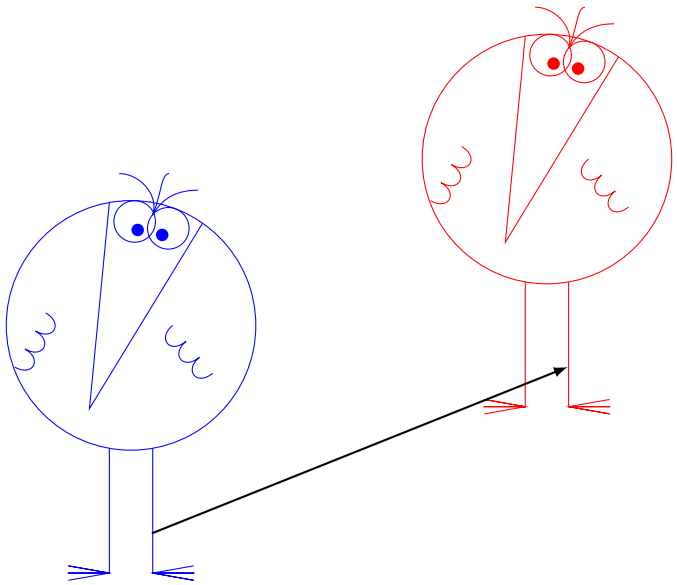
Nous allons étudier quelques transformations élémentaires du plan.

4.1. Transformations élémentaires

Translations.

Notons $\begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$ un élément de $\mathbb{R}^2$. La ***translation de vecteur*** $\begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$ est l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}.$$



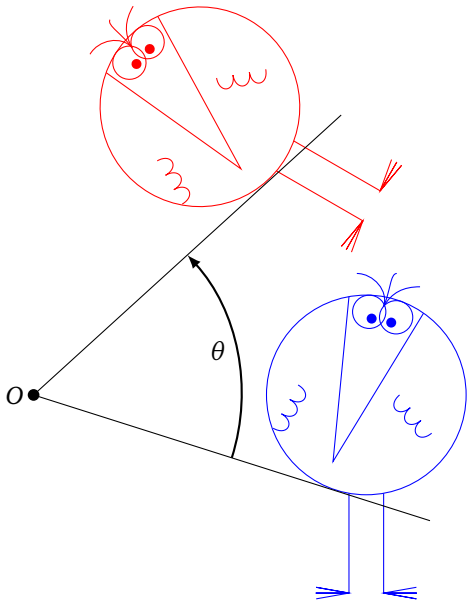
Rotations.

La ***rotation*** de centre l'origine et d'angle θ est l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x\cos\theta - y\sin\theta \\ x\sin\theta + y\cos\theta \end{pmatrix}.$$

À ce point, il est plus facile d'utiliser l'écriture matricielle :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$



On notera M_θ la matrice de la rotation d'angle θ :

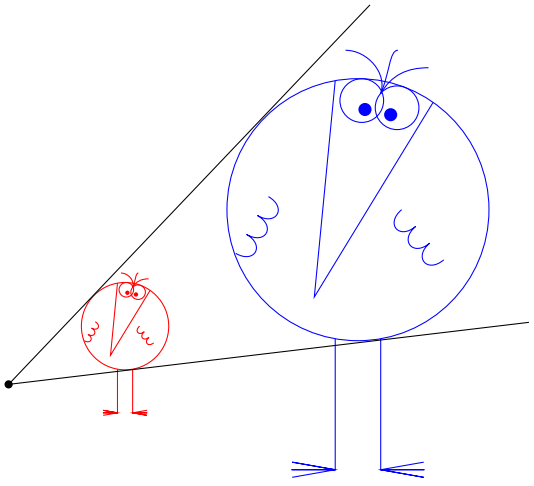
$$M_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Homothéties.

L'***homothétie*** de centre l'origine et de rapport $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ est l'application de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même définie par :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}.$$

Notez que $\begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$ peut aussi s'écrire $k\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.



Réflexions.

Nous commençons par regarder la réflexion par rapport à l'axe des abscisses : c'est l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par

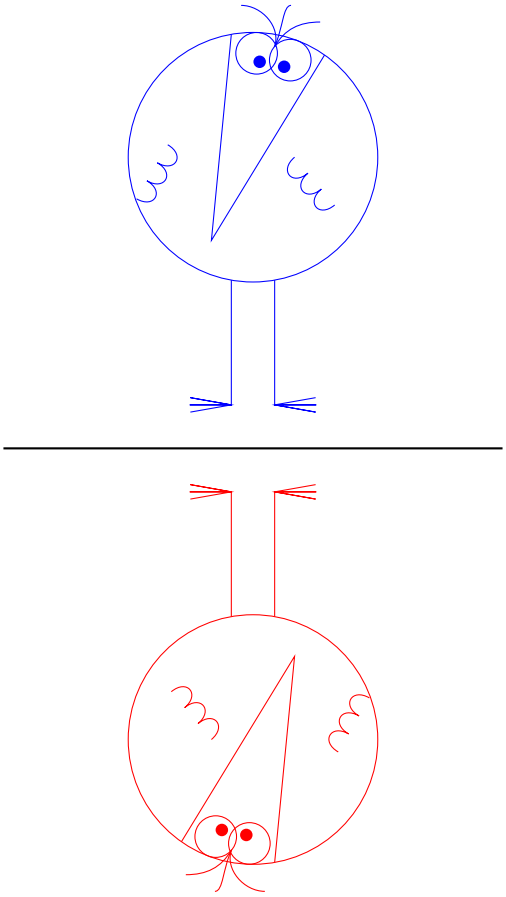
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}.$$

En termes de matrice, l'écriture est la suivante :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Plus généralement l'expression d'une réflexion par rapport à un axe passant par l'origine et faisant un angle $\frac{\theta}{2}$ avec l'axe des abscisses est

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$



4.2. Similitudes

À partir de ces transformations élémentaires, nous pouvons en inventer de nouvelles. Ce qui est remarquable, c'est qu'en composant un nombre quelconque de translations, rotations, homothéties et réflexions, la fonction qui en résulte est l'une des deux suivantes :

Similitude directe.

C'est une application de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même définie par

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto k \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix},$$

où $k > 0$, $\theta \in [0, 2\pi[$, $e, f \in \mathbb{R}$. C'est donc la composée d'une homothétie, d'une rotation et d'une translation.

Similitude indirecte.

C'est une application de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même définie par

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto k \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix},$$

où $k > 0$, $\theta \in [0, 2\pi[$, $e, f \in \mathbb{R}$. C'est la composée d'une homothétie, d'une réflexion et d'une translation. Ce qui va nous intéresser ici est la chose suivante :

Proposition 2.

1. *Les translations, rotations et réflexions conservent les distances (ce sont des isométries).*
2. *Une homothétie de rapport k multiplie les distances d'un facteur $|k|$.*
3. *Une similitude est contractante si et seulement si son rapport vérifie $0 < k < 1$.*
4. *La composition de similitudes contractantes est une similitude contractante.*

Démonstration.

1. - Si g est une translation de vecteur (e, f), notons $P(x, y)$ et $Q(x', y')$ deux points du plan. Alors $g(P) - g(Q) = g(x, y) - g(x', y') = (x + e, y + f) - (x' + e, y' + f) = (x, y) - (x', y') = P - Q$, donc en particulier pour les distances $\|g(P) - g(Q)\| = \|P - Q\|$, ce qui en fait une isométrie.
   - Pour montrer qu'une application linéaire g est une isométrie, il suffit de montrer que
   $$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad \|g(x, y)\| = \|(x, y)\|. \tag{1}$$
   C'est-à-dire que l'on regarde seulement la distance entre les points et l'origine. En effet, si (1) est vraie, alors pour tous $(x, y), (x', y')$ nous obtenons $\|g(x, y) - g(x', y')\| = \|g(x - x', y - y')\| = \|(x - x', y - y')\| = \|(x, y) - (x', y')\|$ (la linéarité joue un rôle essentiel).
   Appliquons ceci à une rotation d'angle θ, $g(x, y) = (x \cos\theta - y \sin\theta, x \sin\theta + y \cos\theta)$. Donc $\|g(x, y)\|^2 = (x \cos\theta - y \sin\theta)^2 + (x \sin\theta + y \cos\theta)^2 = x^2 + y^2 = \|(x, y)\|^2$. (On utilise le fait que $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$.)
   - Pour une réflexion, les calculs sont similaires.
2. On peut supposer que le centre de l'homothétie est à l'origine. L'expression de g est alors $g(x, y) = (kx, ky)$ et donc $\|g(x, y)\| = |k| \cdot \|(x, y)\|$.
3. Une similitude de rapport $k > 0$ est la composition d'isométries et d'une homothétie de rapport k. Elle est donc contractante si et seulement si l'homothétie l'est.
4. Ce point découle du fait qu'une similitude de rapport k composée avec une similitude de rapport k' est une similitude de rapport $k \cdot k'$.

□

Proposition 3.
L'ensemble des similitudes (directes ou indirectes) forme un groupe pour la composition.

Démonstration. À faire en exercice ! □

Exercice : écrire toutes les transformations précédentes à l'aide des nombres complexes. Par exemple l'application $z \mapsto e^{i\theta} z$ est la rotation d'angle θ, centrée à l'origine.

5. Exemples à partir de similitudes

Nous avons déjà vu l'ensemble de Cantor. Reprenons maintenant l'exemple introductif à ce chapitre.

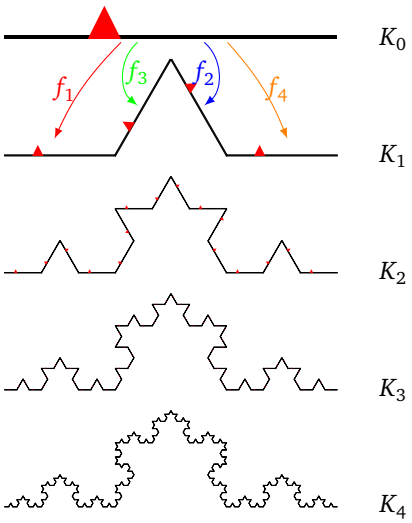
5.1. Le flocon de Koch

Soient les transformations affines suivantes :

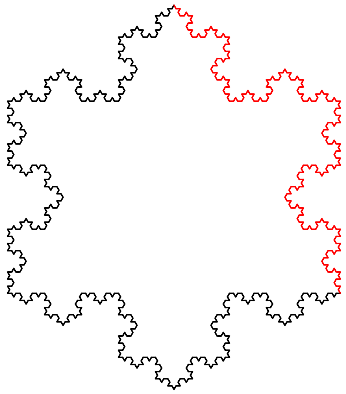
$$f_1\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \qquad f_2\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \frac{1}{3}M_{\frac{\pi}{3}}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\0\end{pmatrix}$$

$$f_3\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \frac{1}{3}M_{-\frac{\pi}{3}}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{\sqrt{3}}{6}\end{pmatrix} \qquad f_4\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\0\end{pmatrix}$$

Ce sont toutes des similitudes de rapport $\frac{1}{3}$. Rappelons que $M_\theta = \begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$ est la matrice de la rotation d'angle θ. Chacune de ces transformations envoie le segment $K_0 = [0,1]\times\{0\}$ sur un petit segment. (Le petit triangle rouge sert seulement ici à distinguer le « haut » du « bas ».) On a représenté $K_0, \dots, K_4$.



K_1 est donc la figure composée d'une seule « dent ». L'attracteur obtenu en itérant le processus indéfiniment est le flocon de Koch. (On applique ici le théorème 4, car on n'a pas $\mathbf{f}(K_0) \subset K_0$.) En fait, pour obtenir un vrai flocon, il faut réunir trois attracteurs.

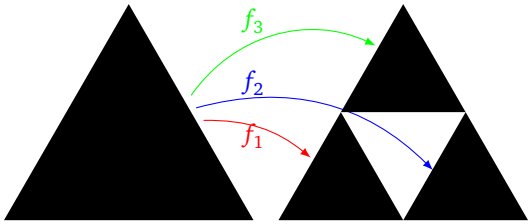


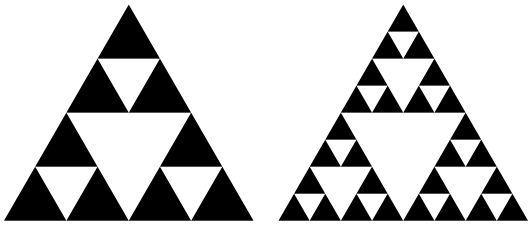
5.2. Le triangle de Sierpinski

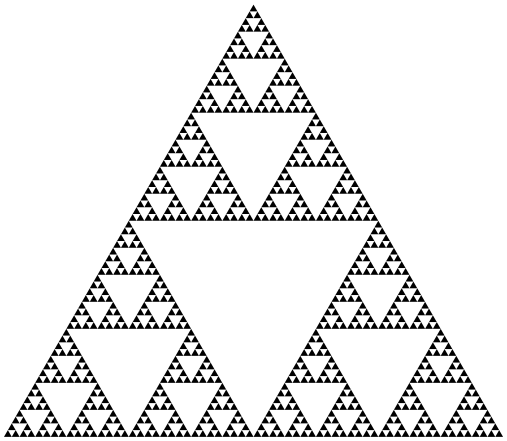
On part de S_0 le triangle équilatéral dont les sommets sont $(0,0)$, $(1,0)$, $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$. On considère les trois transformations affines suivantes :

$$f_1\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \qquad f_2\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix} \qquad f_3\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\frac{1}{4}\\\frac{\sqrt{3}}{4}\end{pmatrix}$$

Chacune des transformations f_i est la composition d'une homothétie de rapport $\frac{1}{2}$ et d'une translation. À la première étape, chacune envoie donc le grand triangle équilatéral S_0 sur un triangle plus petit. Géométriquement, on retire des triangles au centre de chaque plus gros triangle. On a représenté S_0, S_1, S_2, S_3 et S_6, ce qui donne une bonne idée de l'attracteur, appelé le ***triangle de Sierpinski***.

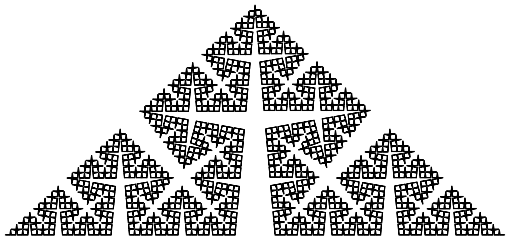






5.3. D'autres fractales

Il est possible de construire bien d'autres figures : voici par exemple le flocon de Koch à 85°. Il y a aussi le tapis de Sierpinski, et en trois dimensions l'éponge de Sierpinski... À vous d'en découvrir d'autres !



6. Transformations affines

6.1. Définition

Une ***transformation affine*** du plan est une application de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même définie par

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix},$$

où a, b, c, d, e, f sont des réels quelconques.
En d'autres termes, à un point (x, y) du plan on associe le point (x', y') défini par

$$\begin{cases} x' &= ax + by + e \\ y' &= cx + dy + f \end{cases}.$$

En fait, une transformation affine f est la composée d'une transformation linéaire g et d'une translation t : $f = t \circ g$. Ici la transformation linéaire est l'application :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

6.2. Exemples

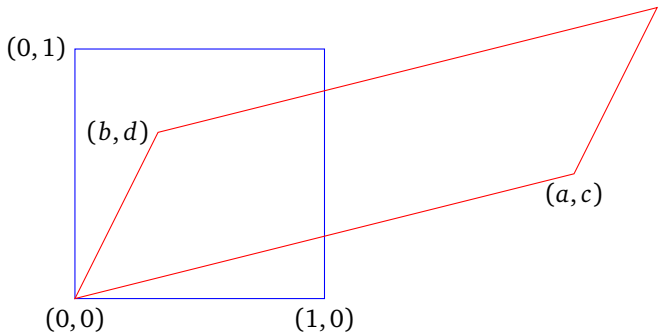
Bien sûr, les translations, rotations, réflexions, homothéties et similitudes sont des transformations affines. Mais voici de nouveaux exemples.

Exemple général

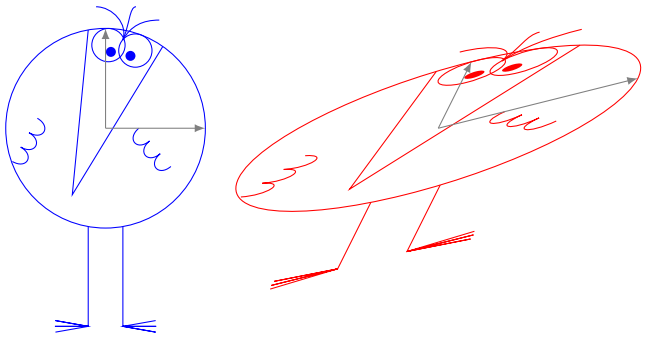
Oublions la translation et concentrons-nous sur l'application f définie par

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Nous avons $f(0,0) = (0,0)$, $f(1,0) = (a,c)$, $f(0,1) = (b,d)$. En termes de vecteurs, nous avons juste écrit que l'image du vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ était le premier vecteur colonne $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$, alors que l'image du vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est le second vecteur colonne $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$. L'image du carré unitaire est donc un parallélogramme.

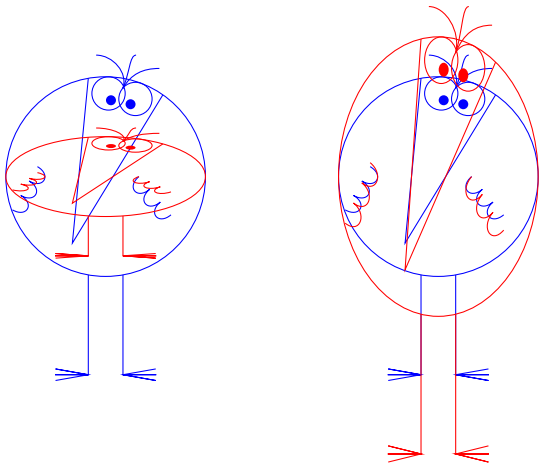


Remarquez que, sur ce dessin, un côté vertical du carré est envoyé sur un petit côté du parallélogramme, et un côté horizontal sur un grand côté. Ni les longueurs ni les proportions ne sont conservées. Voici notre personnage et sa déformation :



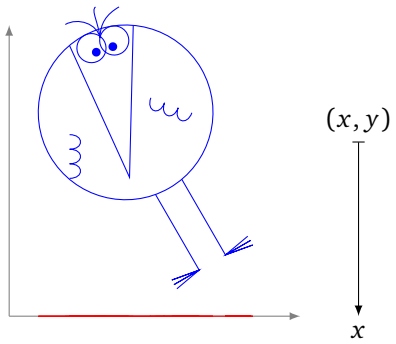
Dilatation ou contraction suivant l'axe vertical.

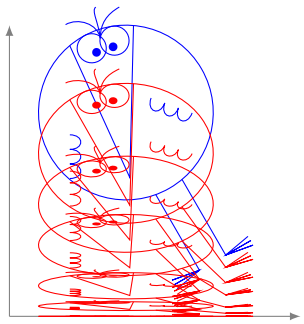
Pour $M = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{smallmatrix}\right)$ et $e = f = 0$. Cette application dilate (si $k > 1$) ou contracte (si $0 < k < 1$) la figure verticalement.



Projection sur un axe.

Pour $M = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ et $e = f = 0$. La transformation affine est alors la projection $(x, y) \mapsto x$. Ce n'est bien sûr pas une application bijective. En particulier, beaucoup d'information est perdue au cours de cette transformation : on ne peut pas retrouver l'ensemble de départ en connaissant l'ensemble image et la projection ! Cette projection est la limite, lorsque $k \to 0$, des contractions verticales du paragraphe précédent.





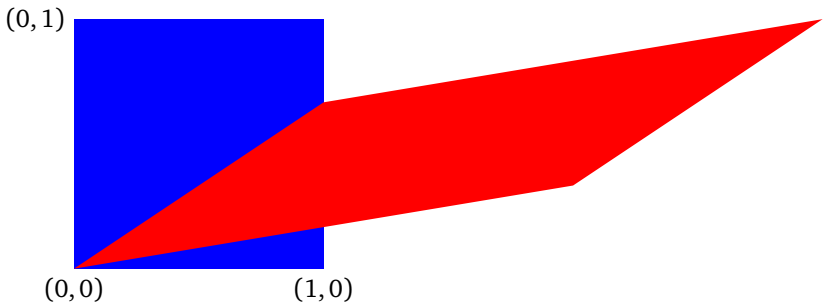
6.3. Propriétés

Proposition 4.

1. *Une transformation affine est une bijection si et seulement si la matrice* $M = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ *est inversible, autrement dit si et seulement si* $\det M = ad - bc \neq 0$.
2. *Une transformation affine bijective conserve le parallélisme.*
3. *Soit* f *une transformation affine, soient* $E \subset \mathbb{R}^2$ *et* $F = f(E)$. *Alors, si les aires* $\mathscr{A}(E)$ *et* $\mathscr{A}(F)$ *sont bien définies, elles vérifient :* $\mathscr{A}(F) = |\det M| \times \mathscr{A}(E)$.

Nous admettons ce résultat.

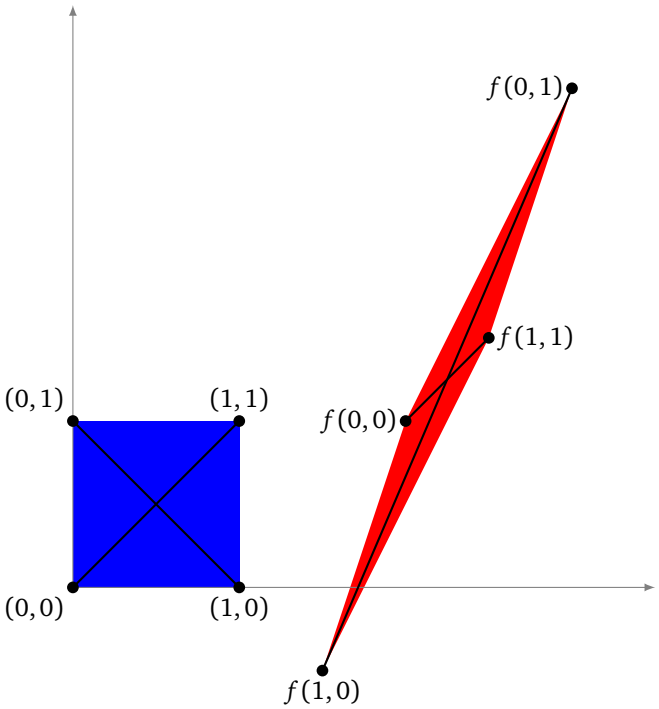
Remarque.
En particulier, si $|\det M| = 1$, alors la transformation affine envoie une surface sur une surface de même aire. Par exemple, prenons la matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$, qui est de déterminant 1. La transformation affine associée conserve les aires. Par contre cette transformation ne conserve pas les distances.



Il n'y a pas de lien évident entre les aires et les distances. Soit

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{3}{2} & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Voici une transformation qui divise les aires par 2 (car $\det M = \frac{1}{2}$), mais certaines distances sont agrandies alors que d'autres sont réduites (regarder les images des diagonales du carré ci-dessous).



Voici une propriété qui caractérise les transformations affines contractantes, donc importantes pour nos attracteurs.

Proposition 5.
Une transformation affine $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$ *est contractante si et seulement si*

$$\begin{cases} a^2 + c^2 < 1 \\ b^2 + d^2 < 1 \\ a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - (ad - bc)^2 < 1 \end{cases} \qquad (\mathscr{S})$$

Démonstration. Tout d'abord, la translation de vecteur $\begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$ étant une isométrie, il suffit de prouver la proposition pour l'application f définie par $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto M_f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, où $M_f = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Comme f est une application linéaire, montrer qu'elle est contractante est équivalent à prouver qu'il existe $0 \leqslant k < 1$ tel que $\|f(x,y)\| \leqslant k\|(x,y)\|$.

Remarquons tout d'abord que, si f est contractante, alors $\|f(1,0)\| < \|(1,0)\|$ et donc que $\|(a,c)\| < 1$, c'est-à-dire $a^2 + c^2 < 1$. De même $\|f(0,1)\| < \|(0,1)\|$ conduit à $b^2 + d^2 < 1$.
Nous allons montrer que le système ($\mathscr{S}$) est équivalent à ce que

$$\|f(x,y)\| < \|(x,y)\| \qquad (2)$$

pour tout vecteur (x,y) non nul. C'est plus faible que le résultat souhaité. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ un vecteur non nul. Si $x = 0$ alors $f(x,y) = f(0,y) = y \cdot f(0,1) = y(b,d)$. Donc $\|f(0,y)\| = \|(0,y)\| \cdot \|(b,d)\|$. Donc si (2) est vérifié alors $b^2 + d^2 < 1$, et réciproquement si ($\mathscr{S}$) est vraie alors (2) est vérifié pour $(0,y)$.
Prenons maintenant (x,y) avec $x \neq 0$. Alors $f(x,y) = x \cdot f(1, \frac{y}{x})$ et donc $\|f(x,y)\| < \|(x,y)\|$ si et seulement si $\|f(1,t)\| < \|(1,t)\|$ avec $t = \frac{y}{x}$. Comparons la norme de $f(1,t) = (a + tb, c + td)$ avec celle de $(1,t)$. Soit $S(t) = \|f(1,t)\|^2 - \|(1,t)\|^2$. Alors $S(t) = \|(a+tb, c+td)\|^2 - \|(1,t)\|^2 = (b^2+d^2-1)t^2 + 2(ab+cd)t + a^2 + c^2 - 1$. Nous souhaitons savoir à quelles conditions $S(t)$ est négative pour tout t. Remarquons que $S(t)$ est négative pour t grand si et seulement si $b^2 + d^2 < 1$ et que, pour $t = 0$, $S(0) < 0$ si et seulement si $a^2 + c^2 < 1$. $S(t)$ est un polynôme du second degré en t : son graphe est une parabole et seul le cas où la parabole est dirigée vers le bas nous intéresse (le coefficient dominant est négatif). En calculant $S'(t) = 2(b^2 + d^2 - 1)t + 2(ab + cd)$, on trouve que le maximum de la parabole est atteint en $t_0 = -\frac{ab+cd}{b^2+d^2-1}$ et vaut $S(t_0) = -\frac{(ab+cd)^2}{b^2+d^2-1} + a^2 + c^2 - 1$. Donc $S(t)$ est tout le temps négative si et seulement si $S(t_0) < 0$, c'est-à-dire si $(a^2 + c^2 - 1)(b^2 + d^2 - 1) > (ab + cd)^2$ (attention : $b^2 + d^2 - 1$ est négatif). En développant, cette condition est équivalente à $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 < 1 + (ad - bc)^2$.
Mis à part les vecteurs du type $(0,1)$ ou $(1,0)$ (traités à part), nous avons montré que le système ($\mathscr{S}$) est équivalent à ce que $\|f(x,y)\| < \|(x,y)\|$. En particulier, si f est contractante, elle satisfait (2) et donc le système ($\mathscr{S}$) est bien vérifié.

Nous avons presque ce que nous souhaitions. Cependant, pour montrer que f est contractante lorsque (2) est vérifié, il faut trouver un $k < 1$ tel que $\|f(x,y)\| \leqslant k\|(x,y)\|$. Cela ne découle pas immédiatement de l'inégalité stricte précédente. (C'est assez subtil, réfléchissez-y !) Nous allons nous en sortir par un argument de compacité. Soit $\mathscr{C}$ le cercle unité : $\mathscr{C} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$. Supposons que f vérifie l'inégalité (2) ; en particulier f est une application continue. L'application $N : \mathscr{C} \to \mathbb{R}$ définie par $N(x,y) = \|f(x,y)\|$ est aussi continue. Ainsi N est une fonction continue sur le compact $\mathscr{C}$: c'est donc une fonction bornée qui atteint ses bornes et donc en particulier son maximum. Soit $(x_0, y_0) \in \mathscr{C}$ un point où N atteint son maximum et notons $N(x_0, y_0) = k$ ce maximum. On sait par l'inégalité (2) que $N(x_0, y_0) = \|f(x_0, y_0)\| < \|(x_0, y_0)\|$ et donc $k < 1$ (car $x_0^2 + y_0^2 = 1$).

Maintenant, k étant le maximum de N, pour tout $(x, y) \in \mathscr{C}$ nous avons $N(x, y) \leqslant k$. Enfin, pour un point non nul $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ quelconque, alors $\frac{1}{\|(x,y)\|}(x, y)$ est un point de $\mathscr{C}$ et par linéarité de f on en déduit que $\|f(x, y)\| \leqslant k\|(x, y)\|$. Et donc f est contractante. □

7. Exemples à partir des transformations affines

Jusqu'ici les exemples que nous avons vus étaient assez géométriques, mais avec les transformations affines, en quelques équations on crée des figures qui ont un premier abord très complexe.

7.1. La fougère de Barnsley

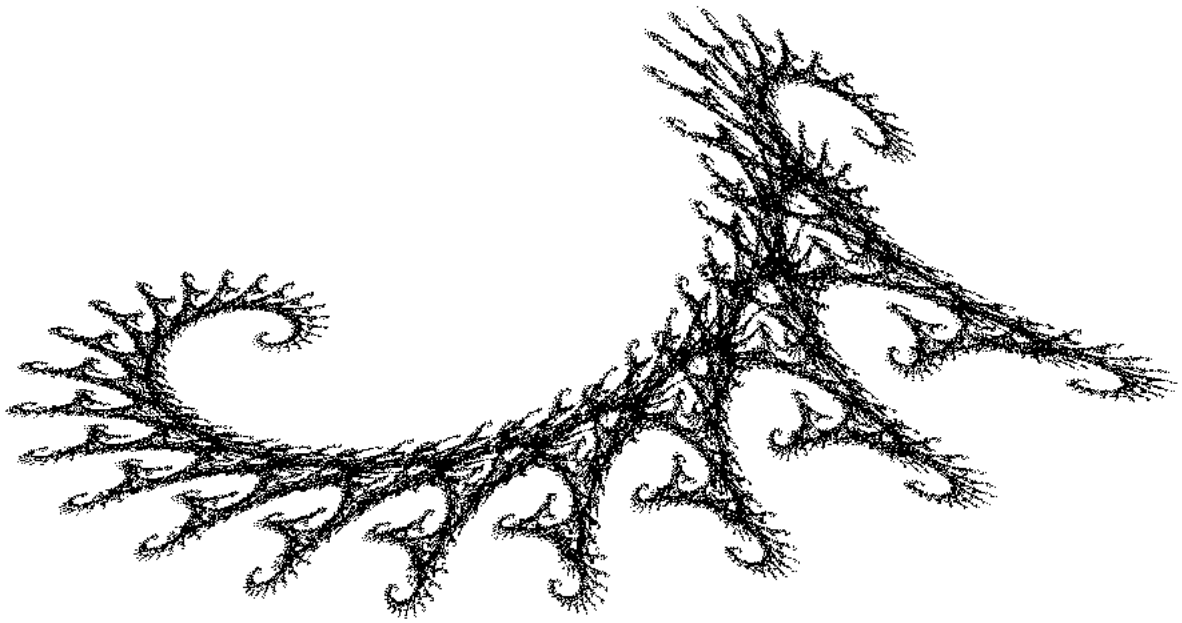
	a	b	c	d	e	f
f_1	0	0	0	0.16	0	0
f_2	0.85	0.04	−0.04	0.85	0	1.6
f_3	0.2	−0.26	0.23	0.22	0	1.6
f_4	−0.15	0.28	0.26	0.24	0	0.44

Voici une explication de chacune des transformations.

- La première transformation f_1 est une projection composée avec une homothétie d'un petit rapport. Elle envoie toute la fougère sur la base de la tige (la portion verticale).
- La seconde transformation f_2 transforme la fougère en la partie supérieure de la fougère (tout sauf les branches droite et gauche les plus basses).
- La transformation f_3 envoie la fougère sur la branche basse de droite.
- La transformation f_4 envoie la fougère sur la branche basse de gauche.

7.2. L'hippocampe

Avec seulement deux transformations, on construit déjà des objets fascinants. Voici un exemple de courbe qui n'est pas sans rappeler un hippocampe.

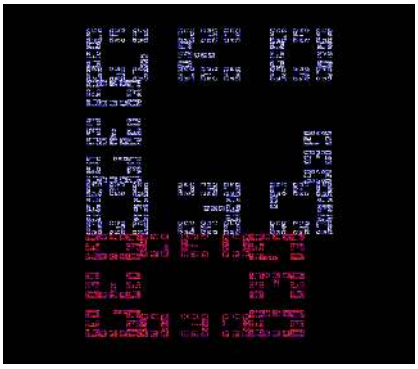


Les transformations sont :

	a	b	c	d	e	f
f_1	0.82	0.28	−0.21	0.86	−1.88	0.11
f_2	0.88	0.52	0.46	−0.37	0.78	8.09

7.3. Vive la géométrie

Enfin, avec un peu de patience et 12 transformations (que nous vous laissons le soin de retrouver), vous pouvez exprimer votre passion pour la géométrie à l'infini !



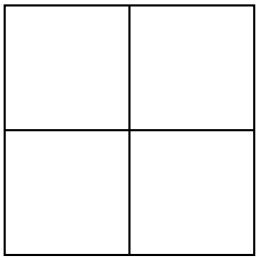
La seconde image est un zoom du coin supérieur gauche.

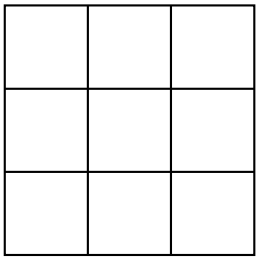
8. Dimension de Hausdorff

8.1. Intuition

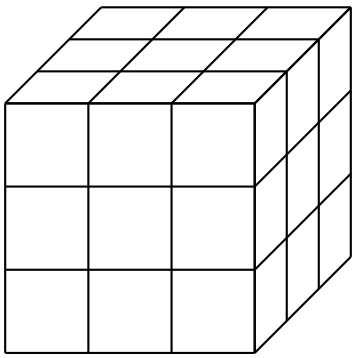
Il serait dommage de ne pas parler de dimension d'un ensemble fractal. Nous allons d'abord comprendre de façon intuitive la notion de dimension. On doit retrouver que la dimension d'un segment est 1, d'un carré est 2 et d'un cube est 3.

Prenons l'exemple d'un carré : si on le réduit d'un facteur $m = 2$, alors il faut $\ell = 4 = m^2$ petits carrés pour reconstituer le carré initial. L'exposant 2 est la dimension de la figure du carré plein. Remarquez que si on décide de réduire notre carré initial d'un facteur $m = 3$, alors $\ell = 9 = m^2$. On retrouve le même exposant $d = 2$.





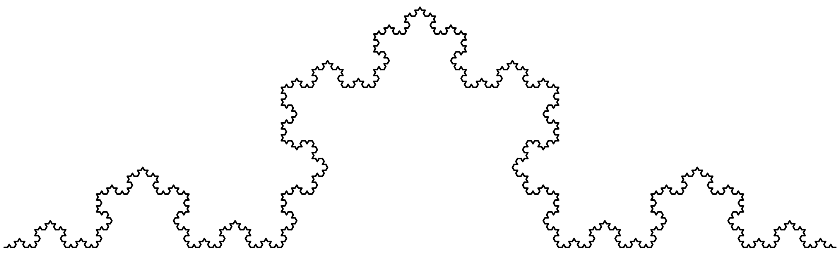
Prenons un cube : si on le réduit d'un facteur $m = 2$, il faut $\ell = 8 = m^3$ petits cubes pour reconstituer le cube initial. Si on le réduit d'un facteur $m = 3$, il faut $\ell = 27 = m^3$ petits cubes (voir la figure ci-dessous). Plus généralement, si on réduit notre cube initial d'un facteur m, il faut $\ell = m^3$ petits cubes. La dimension est l'exposant $d = 3$.



Pour un segment, si on le réduit d'un facteur m, alors on retrouve $\ell = m^1$ petits segments : la dimension est donc $d = 1$.
On voit que la dimension d d'un ensemble E vérifie

$$\ell = m^d,$$

tel qu'après une réduction d'un facteur m, il faut ℓ objets réduits pour reconstituer l'ensemble initial.
Nous allons calculer notre première dimension fractale. Prenons l'exemple du flocon de Koch :



Après réduction d'un facteur $m = 3$ (les contractions sont de rapport $\frac{1}{3}$), il faut $\ell = 4$ ensembles réduits pour reconstituer le flocon. Donc la dimension du flocon est le réel d tel que $4 = 3^d$. En prenant le logarithme on obtient $\ln 4 = d \cdot \ln 3$ et donc $d = \frac{\ln 4}{\ln 3}$. La dimension (dite de Hausdorff) du flocon de Koch est donc $d = 1,2618\ldots$ C'est donc « plus gros » qu'une courbe de dimension 1 mais « plus petit » qu'une surface de dimension 2.
Si on reformule ceci à l'aide de notre famille d'itération $\mathbf{f} = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$, alors chacune est une contraction de rapport $k = \frac{1}{3}$ (donc le facteur de réduction est $m = 3$) et on trouve la relation

$$\ell \cdot k^d = 1$$

avec $\ell = 4$, le nombre de fonctions dans notre famille.

8.2. Dimension pour un système itéré de fonctions

Nous allons énoncer un théorème qui permet de calculer la dimension de Hausdorff d'un attracteur obtenu pour un certain type de système itéré de fonctions $\mathbf{f} = \{f_i\}$. Les fonctions considérées sont ici des similitudes contractantes et l'on note $0 < k_i < 1$ le réel tel que, pour tous $P, Q \in \mathbb{R}^2$,

$$\|f_i(P) - f_i(Q)\| = k_i \|P - Q\|.$$

Il nous faut en plus une ***condition de non-recouvrement*** : on suppose qu'il existe un ouvert $O \subset \mathbb{R}^2$ tel que $\bigcup_{i=1}^{\ell} f_i(O) \subset O$ et tel que $f_i(O)$ et $f_j(O)$ soient disjoints si $i \neq j$.
Voici un « théorème » qui pour nous sera la définition de la dimension de Hausdorff.

Théorème 5.

1. *Soit $\mathbf{f} = \{f_i\}_{i=1,\ldots,\ell}$ une famille de similitudes contractantes de rapport k_i. Alors il existe un réel $d > 0$ tel que :*

$$\sum_{i=1}^{\ell} k_i^d = 1.$$

2. Si la condition de non-recouvrement est vérifiée, alors d est la **dimension de Hausdorff** *de l'attracteur.*

Premier exemple (en dimension 1) : l'ensemble de Cantor C. On rappelle que $f_1(x) = \frac{1}{3}x$, $f_2(x) = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}x$. Les transformations sont bien des similitudes de rapport $k_1 = k_2 = \frac{1}{3}$. Si l'on prend $O =]0,1[$ (un ouvert de $\mathbb{R}$) alors $f_1(O) =]0, \frac{1}{3}[$, $f_2(O) =]\frac{2}{3}, 1[$. La condition de non-recouvrement est vérifiée car $f_1(O) \cup f_2(O) \subset O$ et $f_1(O) \cap f_2(O) = \varnothing$. Nous cherchons donc d tel que :

$$\left(\frac{1}{3}\right)^d + \left(\frac{1}{3}\right)^d = 1.$$

Cela revient à l'équation $2 = 3^d$ ou encore $\ln 2 = d \ln 3$ et donc

$$\dim_H C = \frac{\ln 2}{\ln 3}.$$

La dimension de l'ensemble de Cantor vaut donc environ $0,6309\ldots$

Deuxième exemple : le triangle de Sierpinski S. Les fonctions f_1, f_2, f_3 sont des similitudes de rapport $k_i = \frac{1}{2}$. Pour la condition de non-recouvrement, on prend O le triangle ouvert. Le théorème nous donne alors la relation

$$\left(\frac{1}{2}\right)^d + \left(\frac{1}{2}\right)^d + \left(\frac{1}{2}\right)^d = 1.$$

Et donc $\dim_H S = \frac{\ln 3}{\ln 2}$. Bien sûr, on aurait pu calculer la dimension directement à partir de la définition : après une réduction d'un facteur $m = 2$, il faut $\ell = 3$ triangles réduits pour reconstituer le triangle initial, donc la dimension d vérifie $3 = 2^d$.

9. Le théorème du collage et le jeu du chaos

9.1. Le théorème du collage

Vu le caractère « chaotique » de certaines figures, il est important d'avoir un résultat qui affirme que nos attracteurs sont stables pour l'unicité : si l'on prend un ensemble E qui est proche de $\mathbf{f}(E)$, alors en fait E est proche de l'attracteur C.

Proposition 6.
Soit $\mathbf{f} = \{f_i\}$ une famille de contractions de rapports $k_i \leqslant k < 1$. Soit C l'attracteur de la famille $\mathbf{f}$. Alors, pour tout compact non vide $E \subset \mathbb{R}^2$,

$$dist_H(E, C) \leqslant \frac{1}{1-k} dist_H(E, \mathbf{f}(E)).$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} \mathrm{dist}_H(E, C) &\leqslant \mathrm{dist}_H(E, \mathbf{f}(E)) + \mathrm{dist}_H(\mathbf{f}(E), C) && \text{par l'inégalité triangulaire} \\ &= \mathrm{dist}_H(E, \mathbf{f}(E)) + \mathrm{dist}_H(\mathbf{f}(E), \mathbf{f}(C)) && \text{car } \mathbf{f}(C) = C \\ &= \mathrm{dist}_H(E, \mathbf{f}(E)) + k \cdot \mathrm{dist}_H(E, C) && \text{car } \mathbf{f} \text{ est une famille de contractions} \end{aligned}$$

D'où le résultat. □

Enfin, quelles sont les figures que l'on peut représenter par des attracteurs ? Réponse : toutes ! La proposition suivante, appelée « théorème du collage », affirme que, pour n'importe quelle partie compacte E, on peut trouver une famille de contractions dont l'attracteur C approxime E.

Théorème 6 (du collage).
Soit E une partie non vide et compacte de $\mathbb{R}^2$. Pour chaque $\epsilon > 0$, il existe une famille $\mathbf{f} = \{f_i\}$ de contractions

ayant pour attracteur un ensemble C tel que

$$dist_H(E, C) \leqslant \epsilon.$$

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$. Nous recouvrons notre compact E par un nombre fini de disques ouverts $D_1, \dots, D_\ell$, chacun de rayon $\frac{\epsilon}{4}$ et dont les centres appartiennent à E. Pour chaque disque D_i, nous fixons et notons f_i une contraction de rapport $k_i \leqslant \frac{1}{2}$, telle que $f_i(E) \subset D_i$. Nous notons aussi C l'attracteur de la famille $\mathbf{f} = \{f_i\}$.
Nous allons calculer la distance de Hausdorff entre E et $\mathbf{f}(E)$ pour appliquer la proposition 6. Pour calculer la distance de Hausdorff, nous montrons deux inclusions. Pour la première inclusion, comme $f_i(E) \subset D_i$, alors $\mathbf{f}(E) = \bigcup_i f_i(E) \subset \bigcup_i D_i \subset E(\frac{\epsilon}{4})$, où $E(\frac{\epsilon}{4})$ est le $\frac{\epsilon}{4}$-voisinage de E. Pour l'autre inclusion, nous avons $D_i \subset (f_i(E))(\frac{\epsilon}{2})$ (car D_i est de rayon $\frac{\epsilon}{4}$ et $f_i(E) \subset D_i$). Donc $E \subset \bigcup_i D_i \subset \bigcup_i (f_i(E))(\frac{\epsilon}{2}) = \mathbf{f}(E)(\frac{\epsilon}{2})$. Donc $\text{dist}_H(E, \mathbf{f}(E)) \leqslant \frac{\epsilon}{2}$, et nous appliquons alors la proposition 6 (avec $k = \frac{1}{2}$) pour en déduire $\text{dist}_H(E, C) \leqslant \epsilon$. □

Au début de la preuve, nous avons implicitement utilisé le théorème suivant sur les compacts.

Théorème 7.
Soit $C \subset \mathbb{R}^2$ un compact. Si on a un recouvrement de C par des disques ouverts, alors on peut en extraire un recouvrement fini.

Nous l'avons appliqué de la façon suivante : pour chaque $P \in C$, on considère le disque D_P centré en P et de rayon r (ici r était $\epsilon/4$). Alors on a bien un recouvrement de C par tous les disques D_P : $C \subset \bigcup_{P \in C} D_P$. Le théorème nous affirme que, parmi tous ces disques, un nombre fini est suffisant. Donc il existe des points $P_1, \dots, P_\ell$ tels que $C \subset \bigcup_{i=1,\dots,\ell} D_{P_i}$.

9.2. Le jeu du chaos

Comment en partant d'un seul point, choisi au hasard, peut-on tracer l'attracteur de n'importe quel système itéré de fonctions ?
Soit P_0 un point quelconque de $\mathbb{R}^2$. Notons $E = \{P_0\}$, puis $E_1 = \mathbf{f}(E) = \{f_1(P_0), \dots, f_\ell(P_0)\}$, et de façon générale $E_j = \mathbf{f}^j(E)$. Le théorème 4 prouve alors que $\mathbf{f}^k(E)$ tend vers l'attracteur C. Autrement dit, en prenant l'union de E_j avec des j assez grands, on approche l'attracteur.

La façon la plus efficace de tracer un attracteur à l'aide d'un ordinateur est alors la suivante, appelée « jeu du chaos » : partant d'un point quelconque $P_0 \in \mathbb{R}^2$, on construit une suite de points par récurrence. Si P_k est construit, alors on choisit aléatoirement l'une des transformations f_i de la famille $\mathbf{f}$ et on définit $P_{k+1} = f_i(P_k)$. On laisse de côté les premiers points (disons les 100 premiers qui peuvent être « loin » de l'attracteur) et on trace les points suivants : ces points sont des éléments très proches de l'attracteur et en en traçant suffisamment, ils représentent tout l'attracteur.
La proposition 6 explique aussi que les calculs numériques (et donc approchés) des ordinateurs sont justifiés.

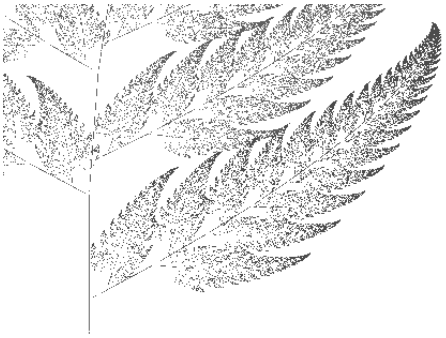
Algorithme « jeu du chaos ».
Entrée : une famille $\mathbf{f} = \{f_i\}_{i=1,\dots,\ell}$ de contractions.
Sortie : un tracé approché de l'attracteur.

- Fixer $P_0 \in \mathbb{R}^2$ au hasard.
- Pour $k \in \{0, \dots, N_{\max}\}$:
  — on choisit au hasard $i \in \{1, \dots, \ell\}$,
  — on pose $P_{k+1} = f_i(P_k)$,
  — à partir de $k \geqslant N_{\min}$ on affiche ce point.

$N_{\max}$ représente le nombre de points à calculer (par exemple $N_{\max} = 10\,000$). $N_{\min}$ est une constante (par exemple $N_{\min} = 100$) qui permet de ne pas tracer les tout premiers points qui peuvent être loin de l'attracteur.
En plus, pour optimiser les calculs, on ne choisit pas les transformations f_i de façon équiprobable mais avec une probabilité p_i. Cette probabilité p_i correspond à la surface couverte par $f_i(C)$ par rapport à celle couverte par C. Voici les probabilités pour la fougère de Barnsley : par exemple, la transformation f_1 qui correspond à un bout de la tige n'est choisie que dans 1% des cas, alors que la transformation f_2 est choisie dans 85% des cas...

	a	b	c	d	e	f	p
f_1	0	0	0	0.16	0	0	0.01
f_2	0.85	0.04	−0.04	0.85	0	1.6	0.85
f_3	0.2	−0.26	0.23	0.22	0	1.6	0.07
f_4	−0.15	0.28	0.26	0.24	0	0.44	0.07

C'est avec cette méthode qu'a été tracée la fougère de Barnsley, dont voici un zoom.

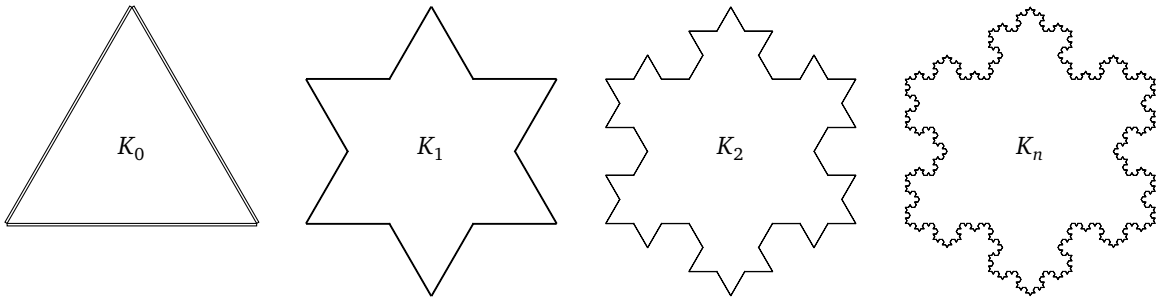


10. Exercices

10.1. Le flocon de Koch

Exercice 1 (Flocon de Koch)**.**
K_0 est un triangle équilatéral, chaque côté étant de longueur 1. K_n désigne la n-ème étape dans la construction du flocon de Koch.

1. Calculer la longueur de la courbe K_n.
2. Calculer l'aire de la surface délimitée par K_n.
3. Quelle est la longueur et la surface du flocon de Koch (la limite de K_n) ?



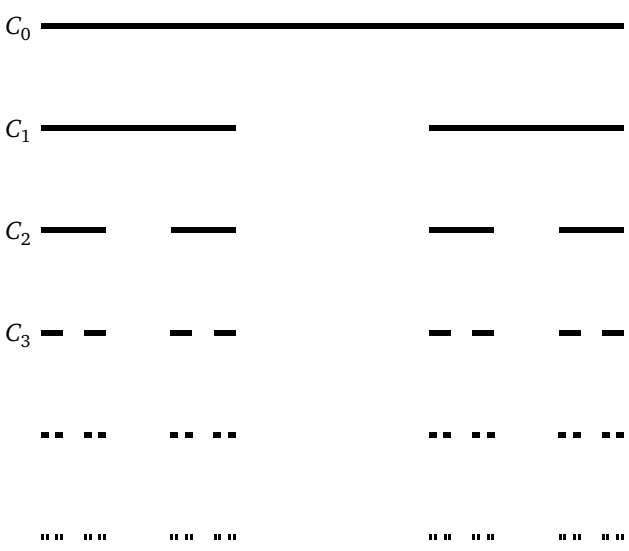
10.2. Topologie de $\mathbb{R}^2$

Exercice 2 (Distance de Hausdorff).

1. Dessiner, pour différentes valeurs de $r > 0$, les r-voisinages d'un carré, d'un carré plein, d'un cercle, d'un disque.
2. Montrer que pour tout ensemble E et pour tous $r, r' \geqslant 0$: $E(r)(r') = E(r + r')$.
3. Calculer $\text{dist}_H(E, F)$ dans chacun des cas suivants :
   (a) E est le cercle de rayon 1 centré à l'origine, F est le disque de rayon 1 centré à l'origine.
   (b) E est le carré de côté de longueur 1 centré à l'origine, F est le cercle de rayon R centré à l'origine. Quel cercle approche le mieux le carré ?
   (c) $E = K_n$, $F = K_{n+1}$, où les K_i sont les itérations conduisant au flocon de Koch.
4. Montrer que la distance de Hausdorff dist_H vérifie l'inégalité triangulaire.
5. Monter que, si C, C' sont deux compacts de $\mathbb{R}^2$ et f est une application k-contractante, alors $\text{dist}_H(f(C), f(C')) \leqslant k \cdot \text{dist}_H(C, C')$.

Exercice 3 (Ensemble de Cantor).
Soit l'ensemble de Cantor C obtenu en itérant le processus suivant. On divise l'intervalle $C_0 = [0, 1]$ en trois intervalles, on retire l'intervalle central pour obtenir $C_1 = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$. On obtient C_2 en retirant l'intervalle central de chacun des sous-intervalles de C_1,... Par définition, $C = \bigcap_{n \geqslant 0} C_n$.

1. Calculer la somme des longueurs des sous-intervalles de C_n.
2. Montrer que C est un compact.
3. Montrer que C est d'intérieur vide : si $x, x' \in C$ (avec $x < x'$) alors il existe $y \in [x, x']$ tel que $y \notin C$.
4. Montrer que $x \in C$ si, et seulement si, il admet une écriture en base 3 ne contenant que des 0 et des 2 :
$$x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{3^n}, \qquad a_n \in \{0, 2\}.$$
5. Montrer que C n'est pas un ensemble dénombrable.



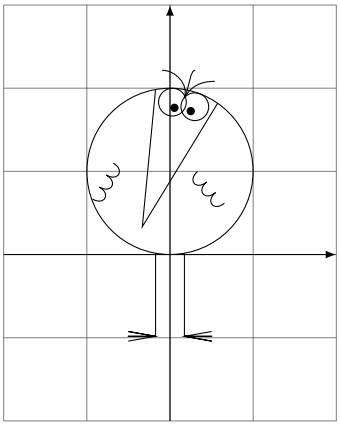
10.3. Isométries, similitudes, transformations affines

Exercice 4.

1. Expliciter deux isométries f, g telles que $f \circ g$ et $g \circ f$ soient distinctes.
2. Montrer qu'une similitude directe d'angle θ et de rapport k composée avec une similitude directe d'angle θ' et de rapport k' est une similitude directe d'angle $\theta + \theta'$ et de rapport $k \cdot k'$.
3. Montrer que l'ensemble des similitudes directes forme un groupe pour la composition.

Exercice 5.
Dessiner l'image du Shadok représenté ci-dessous par chacune des transformations

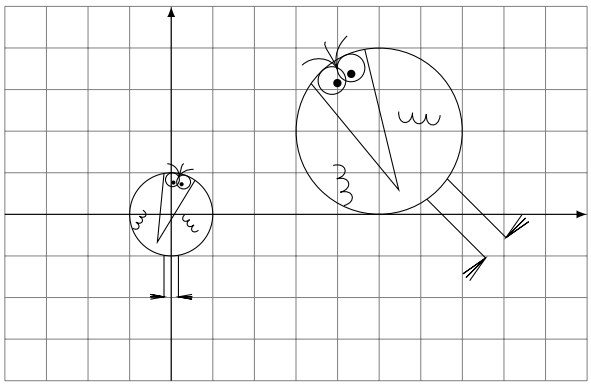
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

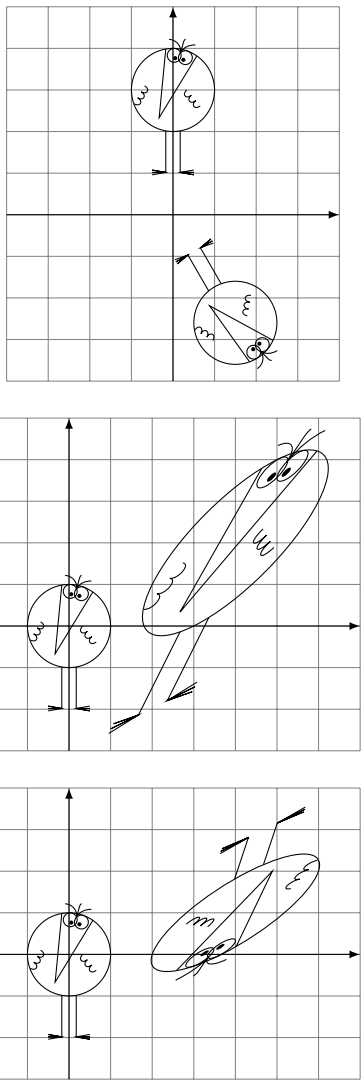


Avec :

1. $a = \sqrt{3}$, $b = -1$, $c = 1$, $d = \sqrt{3}$, $e = -4$, $f = 0$.
2. $a = \frac{1}{2}$, $b = 1$, $c = 0$, $d = 1$, $e = 3$, $f = 0$.
3. $a = 3$, $b = -1$, $c = -2$, $d = -1$, $e = -2$, $f = 1$.

Exercice 6.
Quelles sont les transformations affines qui envoient le Shadok centré sur l'axe des ordonnées sur l'autre Shadok ?

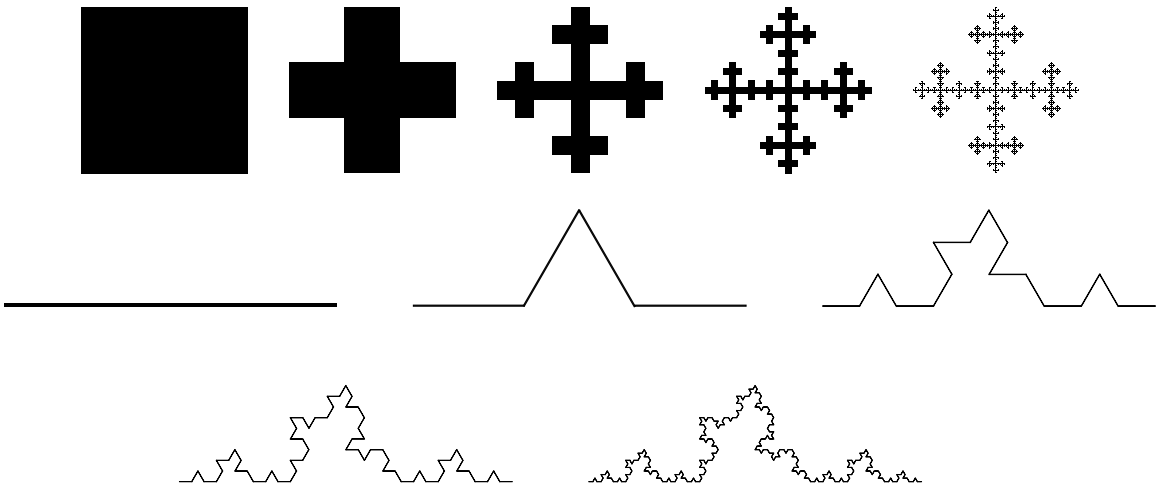


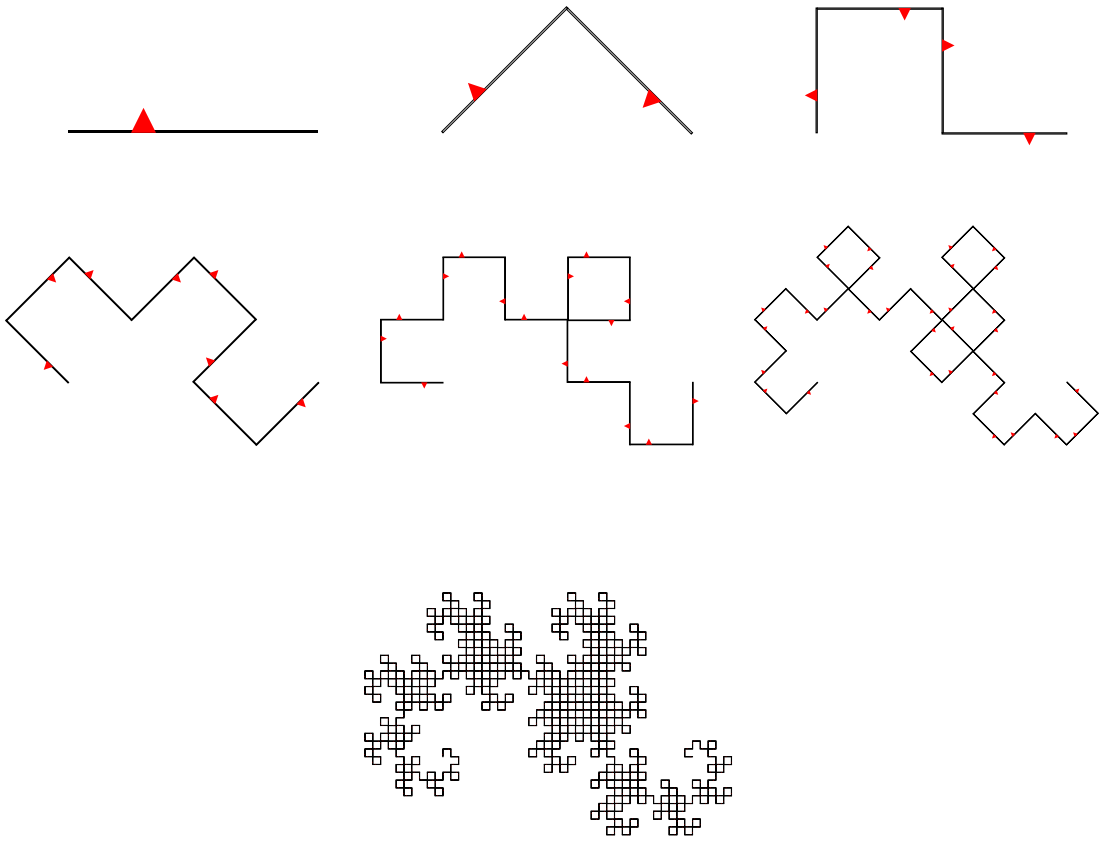


10.4. Attracteurs

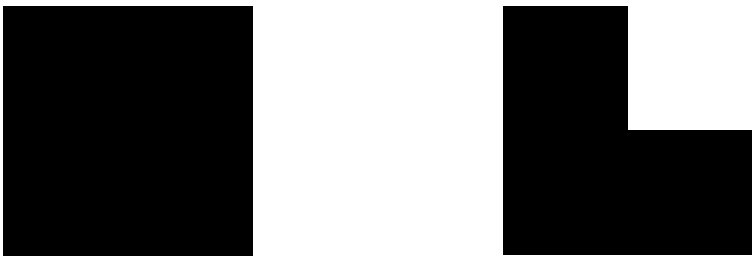
Exercice 7.
Trouver les transformations affines permettant de générer ces fractales :

1. L'arbre de Cayley (partir d'un carré, le diviser en 9, n'en garder que 5 ; il y a 5 transformations).
2. Le faux flocon de Koch.
3. La courbe du dragon.





Exercice 8 (Énigme).
Quel est l'attracteur correspondant à ces deux premières étapes ?



10.5. Dimension de Hausdorff et théorème du collage

Exercice 9 (Dimension de Hausdorff).
Calculer, lorsque c'est possible, la dimension de Hausdorff de chacun des attracteurs des exercices de cette fin de chapitre.

Exercice 10 (À l'infini).
Calculer le système de fonctions permettant de dessiner la fractale composée des trois premières lettres de votre prénom.

Bilbliographie (en anglais) : Kenneth Falconer, *Fractal Geometry*, 1990, John Wiley & Sons.

Auteurs du chapitre Arnaud Bodin
Relu par Vianney Combet et Volker Mayer

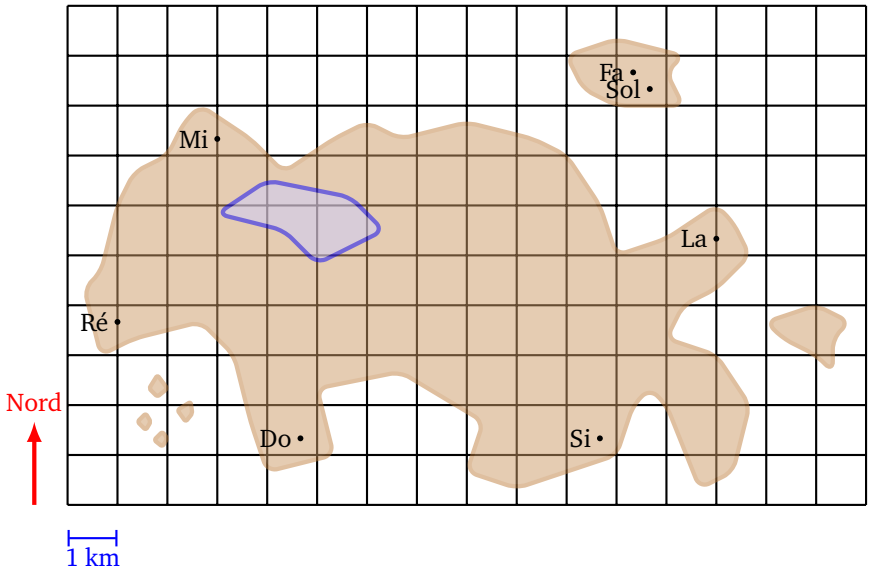
Chapitre 5

Mathématiques du GPS

1. L'île aux 7 phares

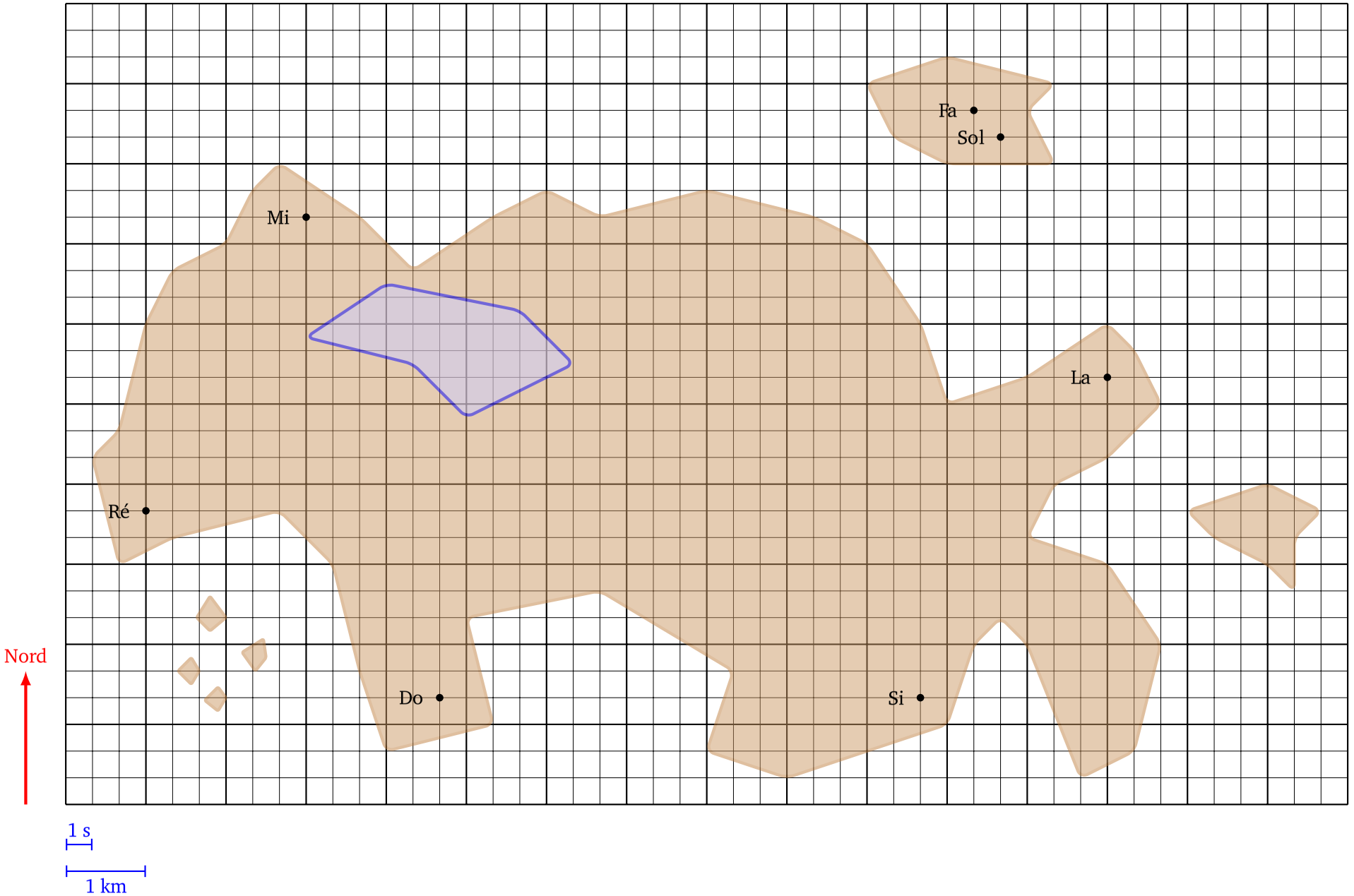
1.1. Perdu !

Au large des côtes bretonnes existe une île ayant la particularité étrange de posséder 7 phares. Cette île, maintenant inhabitée, appartenait à un savant passionné de navigation et de technologie. J'étais venu visiter chacun des 7 phares. Bien sûr la nuit chaque phare s'illumine et émet un signal particulier afin que les marins puissent contourner l'île. Chaque phare porte le nom d'une note de musique. En effet, lorsque le brouillard tombe sur l'île, les cornes de brume résonnent, chacune émettant un son différent, *do*, *ré*, *mi*, *fa*,... En plus le savant avait construit un mécanisme horloger très précis de sorte que toutes les 10 minutes, à la seconde près, les 7 cornes de brume sonnaient un bref coup.



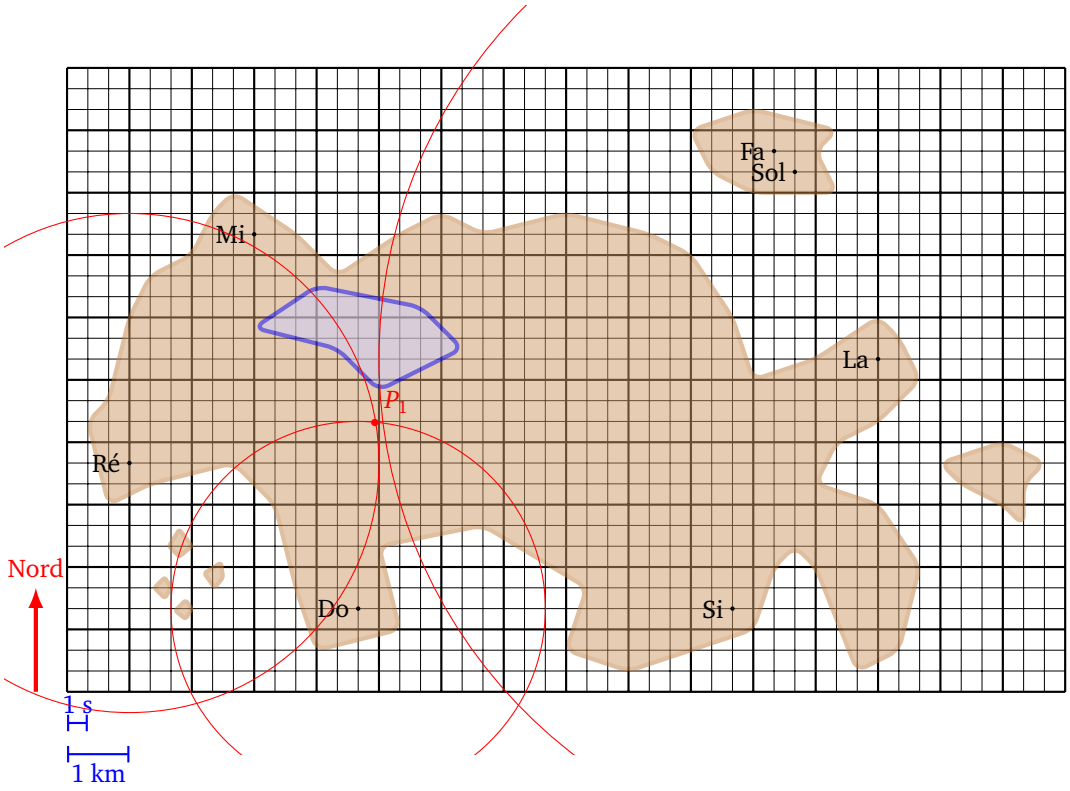
En arrivant sur l'île, j'avais réglé ma montre sur l'horloge du phare *Do* après avoir grimpé tout en haut, puis j'étais parti explorer l'île. Après une belle matinée, le brouillard apparût et, un peu avant midi, je voyais à peine le bout de mes pieds. J'avais bien une carte de l'île et une boussole, mais comme je ne savais pas où je me trouvais, j'étais complètement perdu ! Commençant à m'inquiéter, j'entends tout à coup le son d'une corne de brume, puis quelques instants après une deuxième et bientôt les 7 cornes résonnent chacune à son tour. Rassuré par ces signaux et assis sur un rocher je me fis quand même la remarque que les horloges n'étaient pas si précises qu'on le disait car elles avaient sonné à plusieurs secondes d'écart.
Plongé dans mes réflexions et surtout dans le brouillard, je n'avais rien d'autre à faire que de patienter 10 minutes pour les prochains coups de corne. Je me demandais si les cornes de brume pouvaient m'aider à

m'orienter, peut-être qu'en me dirigeant vers le phare émettant le son le plus fort j'arriverais à le rejoindre. Mais malheureusement, le brouillard atténuait les sons et je ne pouvais pas déterminer d'où ils venaient.


Fa
Sol
Mi
La
Ré
Do
Si
Nord
1 s
1 km

1.2. À toute vitesse

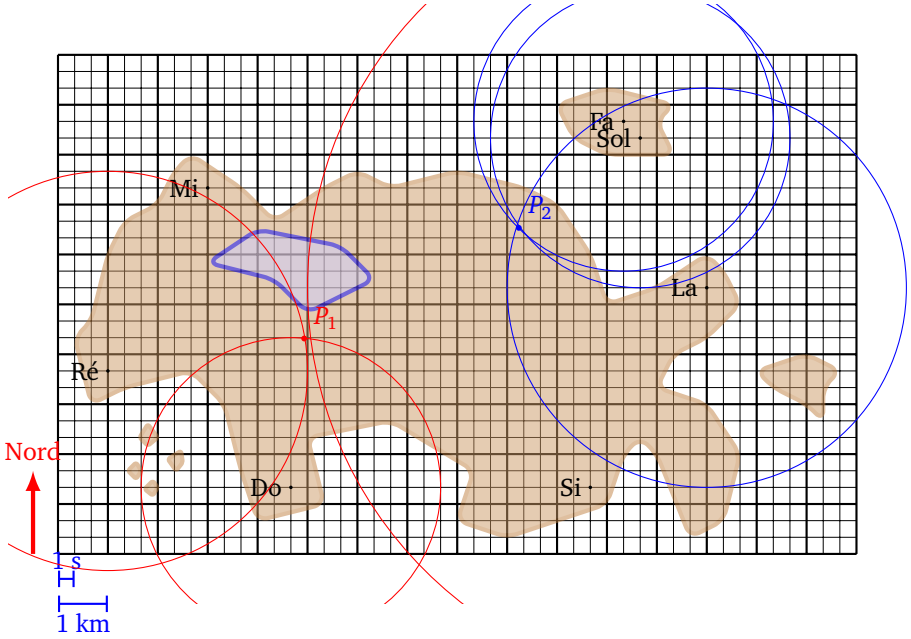
Soudain une illumination : et si les horloges des phares étaient parfaitement réglées, mais que les sons ne me parvenaient pas tous en même temps. Les nuit d'orage, lorsque que j'étais petit, je comptais dans mon lit le temps qui s'écoulait entre l'éclair et le tonnerre, pour savoir si l'orage était loin ou proche. En effet, la lumière de l'éclair arrive quasi-instantanément alors que le son du tonnerre voyage moins vite. On disait qu'un décalage de 3 secondes correspondait à 1 kilomètre. Me souvenant que la vitesse du son dans l'air est de 1200 km/h, soit 333 m/s, il faut bien 3 secondes au son pour parcourir 1 kilomètre.
Aussitôt je sors ma trousse de survie : papier, crayon, règle, compas et je me prépare pour les prochains signaux de 12h00. À 12h00 et 0 seconde rien. J'attends 1 seconde, 2 secondes, toujours rien ! Enfin à 12h00 et 9 secondes j'entends un *do*, suivi à 12h00 et 12 secondes de *ré*, puis les sons s'enchaînent sans que j'ai le temps de les discerner, sauf un *la* feutré qui conclut à 12h00 et 24 secondes.
Je me concentre sur le son *do*. Le son *do* est parti du phare à 12h00 tapante et arrive à mes oreilles 9 secondes plus tard. Il a donc mis 9 secondes pour voyager, et comme en 3 secondes il parcourt 1 kilomètre, il a voyagé sur 3 kilomètres.
Je me trouve donc à 3 km du phare *do*. Géométriquement cela signifie que je me trouve sur un cercle de rayon 3 km, centré sur le phare *do*. Sur la carte de l'île, je m'empresse de tracer ce cercle.



Bien sûr cela ne m'aide qu'à moitié car je ne sais pas où je suis exactement situé sur ce cercle. Voyons ce que m'indique le phare *ré*, le son a mis 12 secondes à parvenir, donc je suis à 4 km du phare *ré*. Je dessine le cercle centré sur ce phare et de rayon 4 km.
Fantastique ! Ces deux cercles se coupent en seulement deux points (normal pour deux cercles). Comme l'un des points est au milieu de l'eau, je sais exactement où je suis. Je ne suis plus perdu !

1.3. Pour aller plus loin...

Avant d'aller plus loin je préfère vérifier mes déductions. Le son *la* du dernier phare est parvenu après 24 secondes, donc je suis à 8 km du phare *la*. Je trace le cercle correspondant et effectivement ce cercle passe presque par le point où je pensais me trouver. Voilà qui est rassurant. Ce qui l'est moins c'est que depuis mon arrivée au phare du *do*, je me suis dirigé plein Nord et que si je continue je vais me diriger droit vers les marais. Je décide donc de m'orienter plutôt vers le Nord-Est afin de rejoindre les phares jumeaux *fa* et *sol*. Au bout d'une heure de marche plus ou moins laborieuse dans le brouillard, je refais le point avec les cornes de brume de 13h00. Cette fois à 13h00 et 9 secondes j'entends en même temps le phare *fa* et le phare *sol*. Puis à 13h00 et 12 secondes le phare *la*.



Je reprends ma carte, je dessine un cercle de rayon 3 km centré sur le phare *fa*, puis un autre cercle de même rayon mais centré sur le phare *sol*. Malheureusement ces deux cercles sont trop proches l'un de l'autre, ce qui fait qu'avec l'épaisseur du trait, j'ai un grosse zone d'intersection. Pas de problème, je trace le cercle centré sur le phare *la* de rayon 4 km qui lui recoupe correctement les deux premiers cercles en un seul point de l'île (et pas dans l'eau).
Je sais encore une fois précisément où je suis. En plus par rapport à ma position d'il y a une heure, je mesure sur la carte que j'ai parcouru un peu plus de 4 km (environ 4,3 km) donc ma vitesse moyenne (en ligne droite) est de plus de 4 km/h.
Enfin, je vois clairement que ma direction depuis 12h00 n'est pas Nord-Est mais plutôt Est-Nord-Est, en fait avec mon rapporteur, je mesure précisément que mon cap est de 63° par rapport au Nord. Je n'ai même plus besoin de boussole.
C'est alors que le soleil revient, et je me trouve non loin des phares jumeaux.

1.4. À vous de jouer

Si vous avez bien compris voici une liste de petits problèmes de difficulté croissante. Armez-vous de votre matériel de géométrie, d'un papier et d'un crayon.

1. À la suite de ma balade je me trouve à un point P_3 où j'entends le phare *si* à 6 secondes et le phare *la* à 15 secondes. Où suis-je ?
2. Deux heures plus tard, je me trouve au point P_4 où j'entends le phare *ré* à 8 secondes et le phare *mi* à 11 secondes. Où suis-je ? Quelle a été ma vitesse moyenne ? Et ma direction par rapport au Nord ?

3. Je me trouve dans une zone située entre 9 et 10 secondes du phare *ré* et entre 11 et 12 secondes du phare *do*. Dessiner cette zone. Mesurer graphiquement l'erreur maximale commise.
4. Partant de la côte ouest, je me promène en prenant bien soin d'entendre la corne de brume des phares *ré* et *mi* en même temps. Vers quel phare je me dirige ?
5. Je me promène maintenant de sorte que le son venant du phare *si* arrive avec le double de temps que le son venant du phare *do*. Où puis-je être ? Si je ne suis pas sur l'île principale, où suis-je ?
6. Ma montre fonctionne toujours, mais elle n'est plus à l'heure ! J'entends le phare *si*, puis 5 secondes plus tard le phare *la* et encore 3 secondes après le phare *ré*. Où suis-je ?

1.5. Bilan

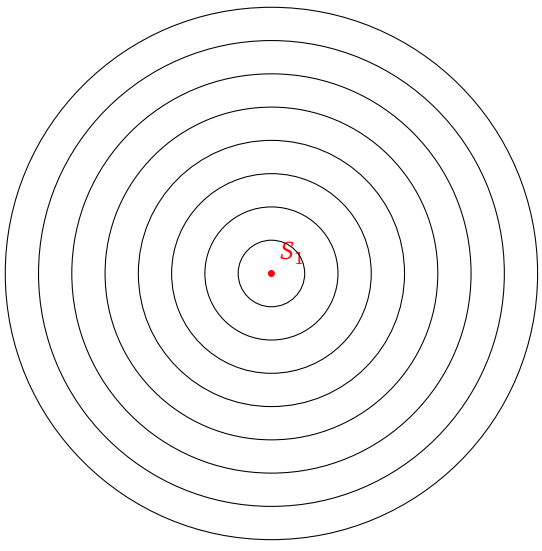
Voici quelques conclusions de notre visite sur l'île.

- Avec deux signaux, je détermine deux positions possibles. L'une des deux peut souvent être exclue car aberrante.
- En répétant les mesures des signaux au fil du temps, je peux en déduire mon parcours, mais aussi ma vitesse ainsi que la direction suivie.
- Si mes mesures sont imprécises alors, au lieu d'un point, je me situe dans une zone.
- Deux signaux qui proviennent de points très proches (comme le cas des phares jumeaux) fournissent une information redondante, qui ne permet pas de déterminer sa position avec une précision raisonnable.
- La mesure d'un troisième signal permet de valider le choix d'un point (par exemple s'il reste deux points possibles) ou bien de réduire la taille d'une zone.
- Enfin, avec trois signaux je peux me passer d'une montre parfaitement à l'heure, en utilisant seulement la fonction chronomètre.

2. Se repérer grâce au GPS

2.1. Deux cercles

Chaque satellite du système GPS, ou chaque phare de l'île, émet un signal à un instant précis. Ce signal voyage au cours du temps dans toutes les directions, sous la forme d'un cercle qui s'agrandit (ou d'une sphère dans l'espace) comme lorsque l'on lance un caillou dans l'eau.



On se place pour l'instant dans le plan. Si le signal est émis au point S_1 à l'instant $t_1 = 0$ et que le signal se déplace à une vitesse c, alors à un instant $t > 0$ quelconque, le signal est perçu exactement en tout point du

cercle $\mathscr{C}_1$ centré en S_1 et de rayon $c \cdot t$. Si le centre S_1 a pour coordonnées (x_1, y_1) alors l'équation de ce cercle est

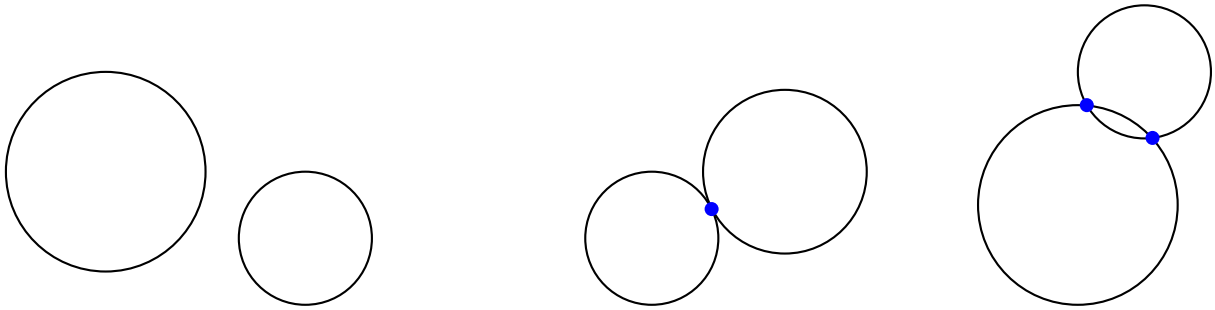
$$\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2} = c \cdot t.$$

Où encore en élevant au carré :

$$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2 = c^2 \cdot t^2.$$

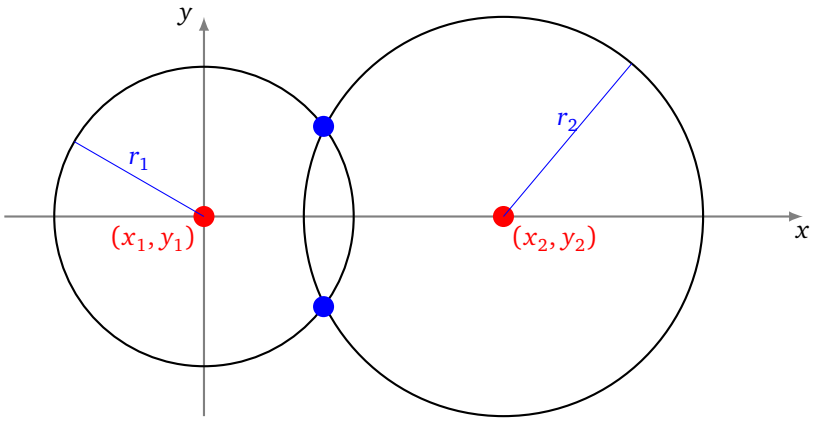
Rappelons que je cherche à déterminer ma position P, et donc si je reçois le signal à l'instant t, j'en déduis que je suis situé sur le cercle $\mathscr{C}_1$ (de rayon $c \cdot t$). Le fait que deux signaux dans le plan déterminent seulement deux positions possibles est la traduction mathématique du résultat suivant :

Proposition 1.
Deux cercles du plan, ayant des centres distincts, se coupent en 0, 1, *ou* 2 *points.*



Dans notre situation l'intersection n'est pas vide, puisque nous sommes à un point d'intersection des deux cercles. La preuve va même nous fournir les coordonnées des points d'intersection. Lorsque qu'il n'y a qu'un point d'intersection, c'est que les deux cercles sont tangents. C'est une situation exceptionnelle qui ne peut pas nous être utile dans la pratique.

Démonstration. On considère deux cercles $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$. Pour simplifier les calculs, et sans perte de généralité, on choisit le repère de sorte que le centre du premier cercle soit $(x_1, y_1) = (0, 0)$, et on choisit l'axe des abscisses de sorte que le centre du second cercle soit dessus : $(x_2, y_2) = (x_2, 0)$.



Les équations des cercles sont alors

$$x^2+y^2 = r_1^2 \qquad \text{et} \qquad (x-x_2)^2+y^2 = r_2^2$$

Un point $P = (x, y)$ est dans l'intersection si ses coordonnées sont solutions de

$$\begin{cases} x^2+y^2 &= r_1^2 \\ (x-x_2)^2+y^2 &= r_2^2 \end{cases} \quad \text{ou encore} \quad \begin{cases} x^2+y^2 &= r_1^2 \\ x^2-2xx_2+x_2^2+y^2 &= r_2^2 \end{cases}$$

Attention, c'est un système à deux équations et deux inconnues, mais les équations ne sont pas linéaires. En retranchant la première ligne à la seconde, ce système équivaut à :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x^2+y^2 & = & r_1^2 \\ -2xx_2+x_2^2 & = & r_2^2-r_1^2 \end{array}\right. \quad \text{c'est-à-dire} \quad \left\{\begin{array}{rcl} x^2+y^2 & = & r_1^2 \\ x & = & \frac{r_1^2-r_2^2+x_2^2}{2x_2} \end{array}\right.$$

On a donc trouvé l'abscisse x de nos solutions. En reportant la valeur de x dans la première équation on trouve :

$$y^2 = r_1^2 - \left(\frac{r_1^2-r_2^2+x_2^2}{2x_2}\right)^2$$

Notons ρ cette quantité, $\rho = r_1^2 - \left(\frac{r_1^2-r_2^2+x_2^2}{2x_2}\right)^2$. Trois cas sont possibles :

- Si $\rho < 0$ alors l'équation $y^2 = \rho$ n'admet pas de solutions et notre système non plus. Les deux cercles ne se coupent pas.
- Si $\rho = 0$ alors $y = 0$. Le système admet une unique solution donnée par $x = \frac{r_1^2-r_2^2+x_2^2}{2x_2}$ et $y = 0$. Les deux cercles se coupent en un unique point.
- Si $\rho > 0$ alors $y = +\sqrt{\rho}$ ou $y = -\sqrt{\rho}$. Le système admet deux solutions données par $\left(\frac{r_1^2-r_2^2+x_2^2}{2x_2}, +\sqrt{\rho}\right)$ et $\left(\frac{r_1^2-r_2^2+x_2^2}{2x_2}, -\sqrt{\rho}\right)$. Les deux cercles se coupent en deux points.

□

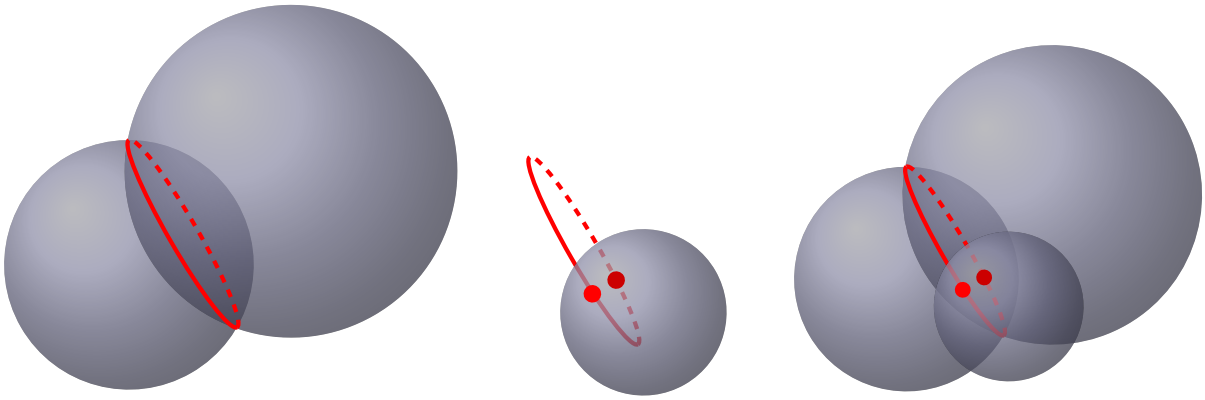
2.2. Trois sphères

Dans l'espace chaque satellite émet un signal qui se propage en une famille de sphères centrées sur le satellite, dont le rayon grandit avec le temps. Lorsque l'on reçoit un signal d'un satellite, nous savons que nous sommes situés sur une sphère centrée en ce satellite. Avec deux satellites, nous savons que nous sommes sur l'intersection de deux sphères, ce qui laisse une infinité de possibilités. Il faut trois sphères pour n'avoir que deux possibilités pour notre position. C'est exactement ce qui dit le théorème :

> **Théorème 1.**
> *Trois sphères, dont les centres ne sont pas alignés, ont une intersection commune de* 0, 1 *ou* 2 *points.*

Encore une fois dans une situation normale, il y aura deux points d'intersections. On exclut un des points, qui correspond souvent à une solution aberrante (par exemple sous terre ou dans l'espace) ou alors on valide une solution par une quatrième signal. Nous allons voir deux méthodes qui permettent de calculer les solutions de façon exacte. Nous verrons une troisième méthode, par calcul approché, lorsque nous aborderons les problèmes d'erreurs.

Mais avant cela commençons par bien comprendre la situation géométrique. Tout d'abord pour deux sphères qui se rencontrent, leur intersection est un cercle de l'espace. Ceci n'est pas si évident à visualiser, mais nous le montrerons par le calcul. Lorsque l'on a trois sphères qui se coupent, alors les deux premières s'intersectent en un cercle (figure de gauche), et ce cercle va recouper la troisième sphère en deux points (figure du milieu). L'intersection des trois sphères est alors formée de deux points (figure de droite).



2.3. Preuve analytique

Pour simplifier les calculs de l'intersection de trois sphères, nous choisissons le repère de sorte que :

- la sphère $\mathscr{S}_1$ soit centrée à l'origine, c'est-à-dire son centre vérifie $(x_1, y_1, z_1) = (0,0,0)$;
- la sphère $\mathscr{S}_2$ soit centrée sur l'axe des abscisses (Ox), c'est-à-dire son centre vérifie $(x_2, y_2, z_2) = (x_2, 0, 0)$;
- la sphère $\mathscr{S}_3$ soit centrée sur le plan (Oxy), c'est-à-dire son centre vérifie $(x_3, y_3, z_3) = (x_3, y_3, 0)$.

Les équations des sphères sont alors :

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2 &= r_1^2 \\ (x-x_2)^2+y^2+z^2 &= r_2^2 \\ (x-x_3)^2+(y-y_3)^2+z^2 &= r_3^2 \end{cases}$$

On soustrait la première ligne aux deux suivantes :

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2 &= r_1^2 \\ (x-x_2)^2-x^2 &= r_2^2-r_1^2 \\ (x-x_3)^2-x^2+(y-y_3)^2-y^2 &= r_3^2-r_1^2 \end{cases}$$

En développant les carrés, le système se simplifie, et on trouve x, puis y (en fonction de ce x) :

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2 &= r_1^2 \\ x &= \frac{r_1^2-r_2^2+x_2^2}{2x_2} \\ y &= \frac{r_1^2-r_3^2+x_3^2+y_3^2-2xx_3}{2y_3} \end{cases}$$

Remarquons que si on ne regarde que l'intersection des deux premières sphères (donc les deux premières équations) alors on trouve $x^2+y^2+z^2 = r_1^2$ avec $x = x_0$ fixé ($x_0 = \frac{r_1^2-r_2^2+x_2^2}{2x_2}$). Cette équation $y^2+z^2 = r_1^2-x_0^2$ est l'équation d'un cercle dans le plan d'équation $(x = x_0)$ orthogonal à la droite joignant les deux centres. Revenons à nos trois sphères ; x et y sont donc entièrement déterminés par $x = x_0$ et $y = y_0$ avec

$$x_0 = \frac{r_1^2-r_2^2+x_2^2}{2x_2} \quad \text{et} \quad y_0 = \frac{r_1^2-r_3^2+x_3^2+y_3^2-2x_0x_3}{2y_3}$$

Il nous reste à trouver z, à l'aide de la première équation devenue $x_0^2+y_0^2+z^2 = r_1^2$. On pose $\rho = r_1^2-x_0^2-y_0^2$, de sorte que $z^2 = \rho$ et ainsi :

- si $\rho < 0$, pas de solutions,
- si $\rho = 0$, une unique solution $(x_0, y_0, 0)$,
- si $\rho > 0$, deux solutions $(x_0, y_0, +\sqrt{\rho})$, $(x_0, y_0, -\sqrt{\rho})$.

Exemple 1.
Quelle est l'intersection des sphères suivantes, dont on donne le centre et le rayon ?

$$\mathscr{S}_1 : \quad (0,0,0), \quad r_1 = 4 \quad ; \quad \mathscr{S}_2, \quad (4,0,0), \quad r_2 = 3 \quad ; \quad \mathscr{S}_3, \quad (2,1,0), \quad r_3 = 2$$

Les équations sont

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2 &= 16 \\ (x-4)^2+y^2+z^2 &= 9 \\ (x-2)^2+(y-1)^2+z^2 &= 4 \end{cases}$$

On reprend pas à pas la démonstration, ou bien on applique directement les formules obtenues, pour trouver

$$x_0=\frac{23}{8}, \qquad y_0=\frac{11}{4}.$$

On pose $\rho=r_1^2-x_0^2-y_0^2=16-\left(\frac{23}{8}\right)^2-\left(\frac{11}{4}\right)^2=\frac{11}{64}$. Comme $\rho>0$ alors en posant $z_0=\sqrt{\rho}=\frac{\sqrt{11}}{8}$, les trois sphères se coupent en deux points :

$$(x_0,y_0,+z_0)=\left(\frac{23}{8},\frac{11}{4},\frac{\sqrt{11}}{8}\right) \quad \text{et} \quad (x_0,y_0,-z_0)=\left(\frac{23}{8},\frac{11}{4},-\frac{\sqrt{11}}{8}\right).$$

2.4. Preuve vectorielle

Les calculs précédents sont tout à fait valides, mais nous aurons besoin d'une autre méthode pour plusieurs raisons : (a) le problème de synchronisation de l'horloge du récepteur GPS ; (b) la gestion de plus de trois satellites.

Pour plus de clarté, nous allons d'abord expliquer cette méthode dans le plan seulement (avec deux cercles, c'est-à-dire avec deux satellites). Nous allons transformer les deux équations non linéaires correspondant aux deux signaux, en deux systèmes linéaires. Chaque système fournira une solution.

Rappelons que dans le plan les deux équations sont

$$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2=r_1^2 \quad \text{et} \quad (x-x_2)^2+(y-y_2)^2=r_2^2$$

On développe chacune des équations ($i=1,2$) :

$$x^2-2xx_i+x_i^2+y^2-2yy_i+y_i^2=r_i^2$$

ce qui donne le système des deux équations :

$$\begin{cases} 2xx_1+2yy_1 &= x^2+y^2+x_1^2+y_1^2-r_1^2 \\ 2xx_2+2yy_2 &= x^2+y^2+x_2^2+y_2^2-r_2^2 \end{cases} \tag{1}$$

Passons à une notation vectorielle et matricielle, on pose :

$$A=\begin{pmatrix} 2x_1 & 2y_1 \\ 2x_2 & 2y_2 \end{pmatrix} \qquad X=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Alors

$$AX=\begin{pmatrix} 2xx_1 & 2yy_1 \\ 2xx_2 & 2yy_2 \end{pmatrix}$$

Posons

$$U=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad V=\begin{pmatrix} x_1^2+y_1^2-r_1^2 \\ x_2^2+y_2^2-r_2^2 \end{pmatrix}$$

de sorte que

$$B=(x^2+y^2)U+V=\begin{pmatrix} x^2+y^2+x_1^2+y_1^2-r_1^2 \\ x^2+y^2+x_2^2+y_2^2-r_2^2 \end{pmatrix}$$

Les équations (1) s'écrivent simplement

$$AX=B \tag{2}$$

Supposons pour l'instant que la matrice A soit inversible, alors

$$X=A^{-1}B$$

où $X=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est la position à déterminer.

Il y a cependant un problème ! Contrairement à ce que je vous laisse croire, l'écriture $AX = B$ ne correspond pas à un système linéaire, car B dépend de x et y (donc de X). Nous allons profiter du fait que B ne dépende que de $x^2 + y^2$ afin de montrer qu'il y a seulement deux choix possibles pour B.

Pour $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, on définit le produit scalaire :

$$\langle X \mid X' \rangle = xx' + yy'$$

et la norme

$$\|X\| = \sqrt{\langle X \mid X \rangle} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Posons $d = x^2 + y^2$, alors

$$\begin{aligned} d = x^2 + y^2 = \|X\|^2 &= \langle X \mid X \rangle \\ &= \langle A^{-1}B \mid A^{-1}B \rangle \quad \text{car } AX = B \\ &= \langle A^{-1}(dU + V) \mid A^{-1}(dU + V) \rangle \quad \text{car } B = dU + V \\ &= \langle A^{-1}(dU + V) \mid dA^{-1}U \rangle + \langle A^{-1}(dU + V) \mid A^{-1}V \rangle \\ &= \langle dA^{-1}U \mid dA^{-1}U \rangle + \langle A^{-1}V \mid dA^{-1}U \rangle \\ &\quad + \langle dA^{-1}U \mid A^{-1}V \rangle + \langle A^{-1}V \mid A^{-1}V \rangle \\ &= d^2 \langle A^{-1}U \mid A^{-1}U \rangle + 2d \langle A^{-1}U \mid A^{-1}V \rangle + \langle A^{-1}V \mid A^{-1}V \rangle \\ &= d^2 \|A^{-1}U\|^2 + 2d \langle A^{-1}U \mid A^{-1}V \rangle + \|A^{-1}V\|^2 \end{aligned}$$

Ainsi $d = x^2 + y^2$ vérifie une équation du second degré :

$$\|A^{-1}U\|^2 d^2 + \big(2\langle A^{-1}U \mid A^{-1}V \rangle - 1\big) d + \|A^{-1}V\|^2 = 0 \tag{3}$$

Cette équation admet (au plus) deux solutions positives d_1 et d_2, donc deux possibilités pour le second membre de (2) :

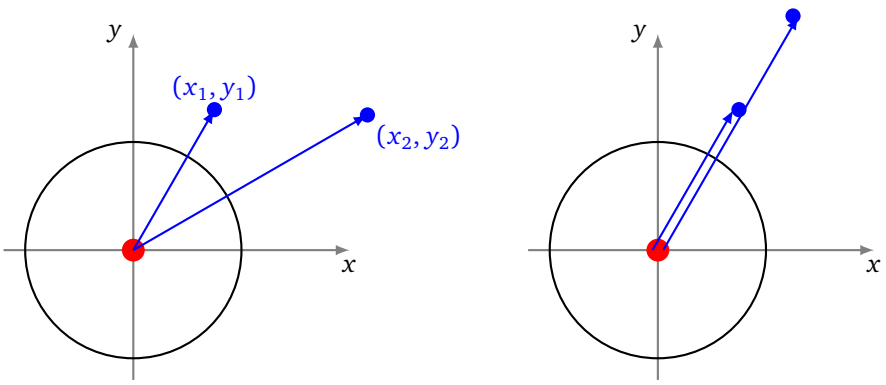
$$B_1 = d_1 U + V \quad \text{ou} \quad B_2 = d_2 U + V.$$

B_1 et B_2 sont maintenant clairement déterminés (ils ne dépendent plus de x et de y). Pour le second membre B_1, on résout le système linéaire $AX = B_1$ en $X = A^{-1}B_1$, puis on résout le système linéaire $AX = B_2$, en $X = A^{-1}B_2$.

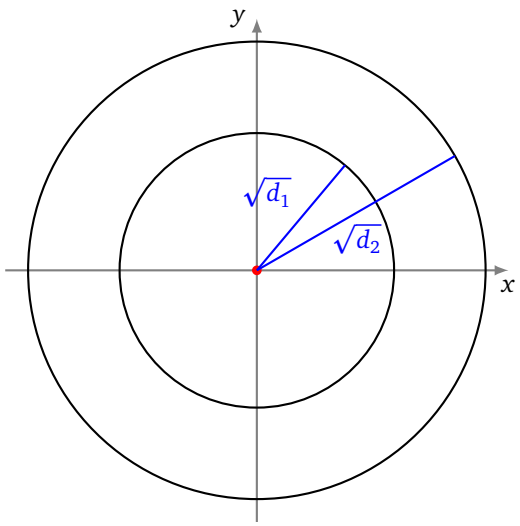
Ce qui donne bien deux solutions possibles pour notre position X.

Terminons par quelques commentaires.

- Imaginons que l'origine du repère soit le centre de la Terre, alors la matrice A est inversible si et seulement si les vecteurs $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires, c'est-à-dire, si et seulement si, les deux satellites ne sont pas alignés avec le centre de la Terre.



- Dans ce repère $\sqrt{d}$ représente le rayon du cercle, centré au centre de la Terre sur lequel on se trouve. Le fait de trouver deux possibilités pour d, correspond à deux rayons possibles. Si l'on se déplace à la surface de la Terre, il est facile de choisir le «bon» rayon.



Exemple 2.
On considère un cercle $\mathscr{C}_1$ de centre $S_1 = (1,1)$ et de rayon $r_1 = 2$ et un cercle de $\mathscr{C}_2$ de centre $S_2 = (-2,-1)$ et de rayon $r_2 = 3$. On pose comme ci-dessus :

$$A = \begin{pmatrix} 2x_1 & 2y_1 \\ 2x_2 & 2y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad V = \begin{pmatrix} x_1^2 + y_1^2 - r_1^2 \\ x_2^2 + y_2^2 - r_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix} \quad B = (x^2+y^2)U+V$$

On calcule

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^{-1}U = \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} \qquad A^{-1}V = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

et donc

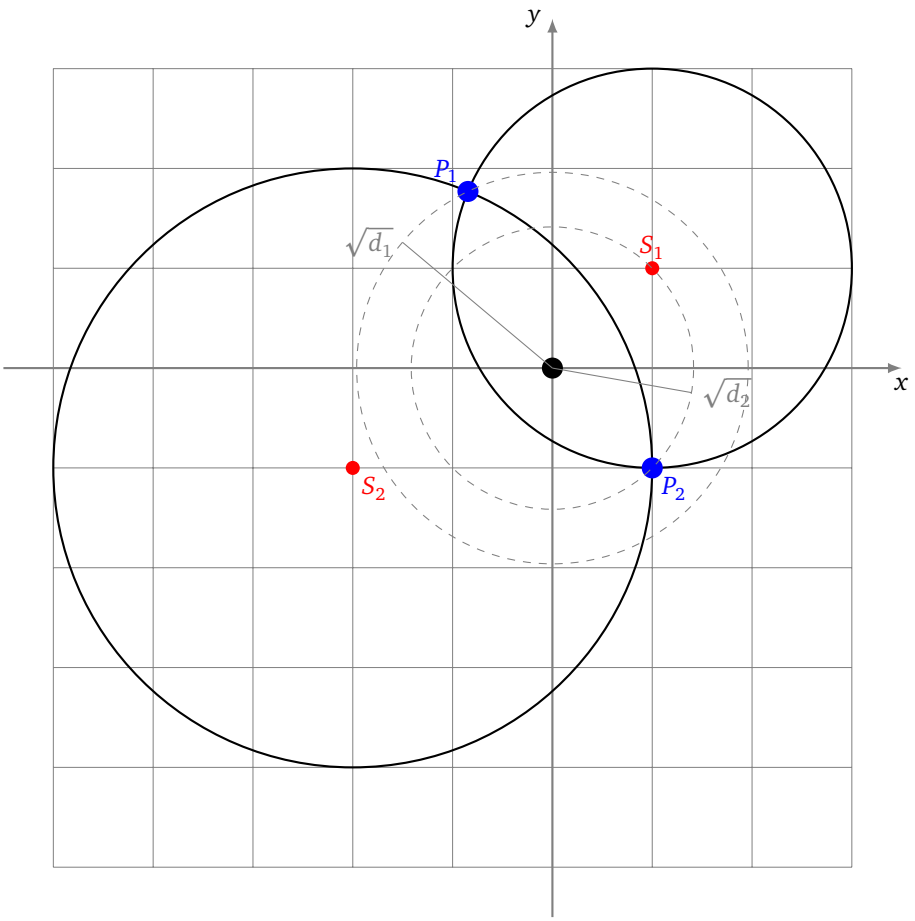
$$\|A^{-1}U\|^2 = \frac{13}{4} \qquad \langle A^{-1}U \mid A^{-1}V \rangle = -9 \qquad \|A^{-1}V\|^2 = 25$$

Alors l'équation (3) que vérifie $d = x^2 + y^2$ s'écrit ici :

$$\frac{13}{4}d^2 - 19d + 25 = 0$$

Les deux solutions sont :

$$d_1 = \frac{50}{13} \qquad \text{et} \qquad d_2 = 2$$



On obtient deux seconds membres possibles :

$$B_1 = d_1U + V = \begin{pmatrix} \frac{24}{13} \\ \frac{-2}{13} \end{pmatrix} \qquad B_2 = d_2U + V = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Et donc deux points d'intersection dont les coordonnées sont données par $X = A^{-1}B$:

$$P_1 = A^{-1}B_1 = \begin{pmatrix} \frac{-11}{13} \\ \frac{23}{13} \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad P_2 = A^{-1}B_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

2.5. Dimension 3

Le cas de la dimension trois est vraiment très similaire, c'est l'avantage de la méthode vectorielle. Traitons-le succinctement, à partir de trois équations ($i = 1, 2, 3$),

$$(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2 = r_i^2$$

fournies par le signal de trois satellites, on développe, pour obtenir :

$$2xx_i + 2yy_i + 2zz_i = x^2 + y^2 + z^2 + x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 - r_i^2$$

On pose alors

$$A = \begin{pmatrix} 2x_1 & 2y_1 & 2z_1 \\ 2x_2 & 2y_2 & 2z_2 \\ 2x_3 & 2y_3 & 2z_3 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad V = \begin{pmatrix} x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - r_1^2 \\ x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 - r_2^2 \\ x_3^2 + y_3^2 + z_3^2 - r_3^2 \end{pmatrix} \quad B = (x^2 + y^2 + z^2)U + V$$

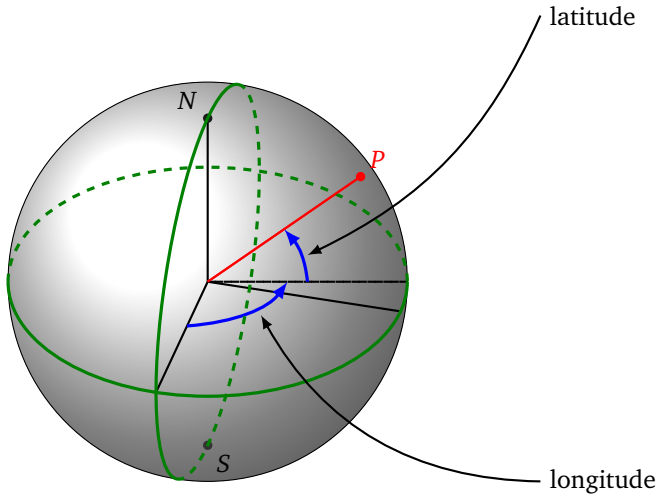
de sorte que l'on se ramène au système $AX = B$. On détermine deux solutions possibles pour $d = x^2 + y^2 + z^2$, qui vérifie exactement la même équation (3). Il reste alors à résoudre deux systèmes linéaires $AX = B_1$ et $AX = B_2$.

3. Temps

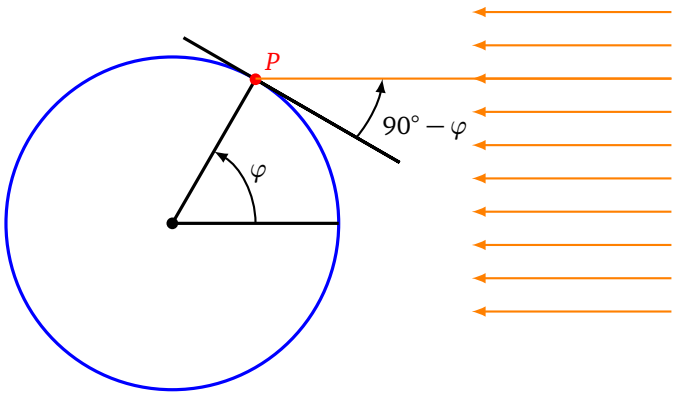
Avant d'être un instrument de mesure de position, le GPS est un instrument de mesure du temps !

3.1. Le vieux problème de la longitude

La navigation des bateaux s'est longtemps heurtée à un problème crucial : où est le bateau ? Pour se diriger les marins disposent d'une boussole qui permet de suivre un cap, mais le préalable est de savoir où l'on est ! Pour se repérer sur Terre (et sur mer) on utilise les coordonnées latitude et longitude (on y reviendra).



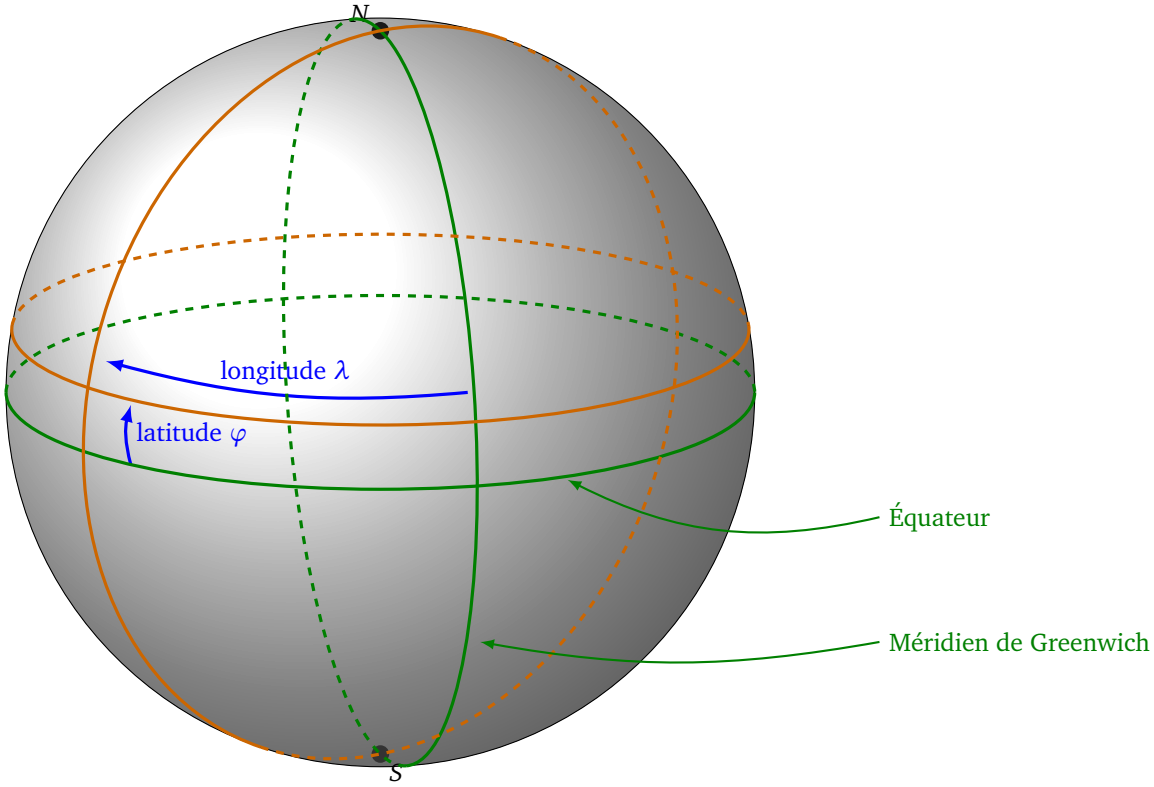
Déterminer la latitude est facile, imaginons que nous sommes le 21 mars, le jour de l'équinoxe. Ce jour là, lorsqu'il est au plus haut, le Soleil est vertical pour les gens situés à l'équateur.
Pour un marin situé n'importe où en mer, il détermine à l'aide d'un sextant (une sorte de rapporteur) l'angle entre l'horizon et le Soleil, lorsque celui-ci est au plus haut dans le ciel. Cet angle est exactement $90° - \varphi$, où φ est la latitude du lieu. Il connaît donc sa latitude.



Pour d'autres jours il faut utiliser des tables astronomiques qui donne la hauteur attendue du Soleil. La nuit on peut faire un calcul similaire avec l'étoile polaire, dans l'hémisphère nord.

Le problème de la longitude est beaucoup plus délicat, des tentatives ont été faites avec des cartes de la position des étoiles mais cela restait très imprécis. La solution vient du temps. En 1735, John Harrison horloger en Angleterre invente un chronomètre maritime qui allait révolutionner la navigation. Ce système permet à chaque bateau de disposer d'une horloge qui fournit l'heure avec une bonne précision, chose qui n'était pas possible avant, les précédentes horloges avançaient ou retardaient à cause des mouvements du bateau ou des changements de température et de pression.

Comment l'heure exacte permet de trouver la longitude ? Imaginons un bateau quittant le port de Londres à midi pile, le 1er juillet avec à son bord un horloge précise. Au bout de dix jours en mer à naviguer vers le Sud-Ouest, le capitaine souhaite savoir où il est. Lorsqu'il est midi pour lui, c'est-à-dire lorsque le Soleil est au plus haut dans le ciel, il mesure la latitude comme on vient de l'expliquer. Puis il retourne à sa cabine pour voir l'heure indiquée par l'horloge, sachant que l'horloge indique toujours l'heure de Londres. Par exemple l'horloge indique 14h30. Ce qui signifie que le Soleil était au plus haut 2h30 plus tôt à Londres. Ce décalage est simplement dû à la rotation de la Terre. La Terre fait un tour complet (360°) sur elle-même en 24h, donc 15° en 1 heure. Donc ici le bateau est à 37,5°($= 2{,}5 \times 15°$) à l'ouest du méridien de Greenwich situé dans la banlieue de Londres.



Si l'horloge (et les mesures) sont précises à 30 s près alors l'erreur commise sur la longitude est inférieure à 15 km. Ce qui est tout fait raisonnable après avoir traversé l'océan !

Conversion temps – angle – distance.
Voyons différentes façons de mesurer des déplacements si l'on voyage le long de l'équateur. On note R le rayon de la Terre (on prendra $R = 6300$ km). La Terre fait un tour complet en 24 h et la longueur de l'équateur est $2\pi R$, alors on a la correspondance temps/angle/distance :

$$24\,\text{h} \longleftrightarrow 360° \longleftrightarrow 2\pi R$$

On applique la règle de trois, pour obtenir exemple

$$1\,\text{min} \longleftrightarrow 0{,}25° \longleftrightarrow 27{,}5\,\text{km}$$

Ces calculs sont aussi valables si on voyage le long d'un méridien (n'importe lequel).
Par contre si on voyage sur un parallèle autre que l'équateur alors il faut tenir compte de la latitude φ. Le parallèle est un cercle de longueur $2\pi R\cos\varphi$. On a alors la correspondance :

$$24\,\text{h} \longleftrightarrow 360° \longleftrightarrow 2\pi R\cos\varphi$$

Par exemple pour une latitude de $\varphi = 45°$ alors la correspondance devient :

$$1\,\text{min} \longleftrightarrow 0{,}25° \longleftrightarrow 19{,}4\,\text{km}$$

3.2. Vision géométrique (une dimension)

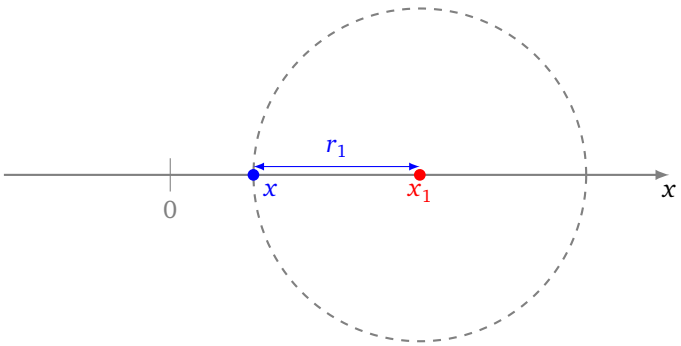
Commençons par un modèle spatial en une seule dimension ! Pour se repérer sur une droite, un seul satellite suffit à déterminer deux abscisses possibles, si nous disposons d'une mesure absolue du temps. En effet pour un signal émis au temps t_1 (cette information est fournie dans le signal, de même que la position du satellite) et reçu au temps t, la distance parcourue par le signal est $r_1 = c(t - t_1)$: c'est la distance entre notre position x et la position x_1 du satellite. On doit donc résoudre l'équation :

$$|x - x_1| = r_1$$

et on trouve deux solutions $x = x_1 + r_1$ et $x = x_1 - r_1$. On préfère écrire l'équation :

$$(x - x_1)^2 = c^2(t - t_1)^2.$$

Géométriquement on trouve les solutions x en traçant le cercle de rayon r_1 centré en x_1.

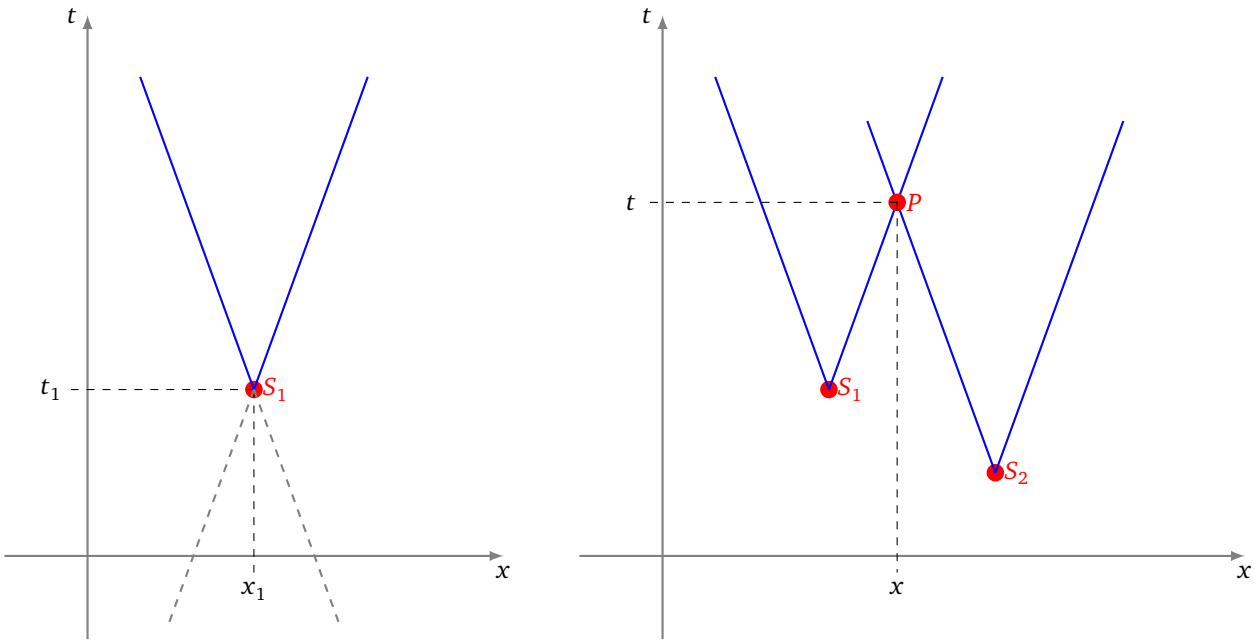


Le problème c'est que l'horloge du satellite et l'horloge du récepteur GPS doivent être parfaitement synchronisées, afin de mesurer le décalage de temps. La satellite dispose d'une horloge atomique de très grande précision mais pas le récepteur GPS. Il faut donc considérer que l'instant t de réception n'est pas connu (du moins pas avec une précision suffisante). Il nous faut un autre satellite et un autre signal.

Avec deux satellites nous avons deux équations :

$$\begin{cases} |x - x_1| &= c|t - t_1| \\ |x - x_2| &= c|t - t_2| \end{cases}$$

Si on représente le déplacement du signal en fonction de l'abscisse x au cours du temps t et si le signal est émis au point x_1 à l'instant t_1, alors le signal part du point (x_1, t_1) et «voyage» le long d'un cône. Ce cône correspond à l'équation $|x - x_1| = c|t - t_1|$, dont les solutions sont les points des deux droites d'équations $x - x_1 = +c(t - t_1)$ et $x - x_1 = -c(t - t_1)$. Donc avec le signal d'un satellite, nous savons que notre position (x, t) est sur ce cône.



Avec deux satellites, nous disposons de deux cônes. Ces deux cônes s'intersectent en un seul point. Ce point est notre position (x,t). On vient de déterminer à la fois notre position x, mais aussi l'instant t auquel on reçoit les deux signaux.

Noter que les deux cônes sont composés de droites parallèles, car pour les deux cônes les pentes de droite sont $+\frac{1}{c}$ et $-\frac{1}{c}$ (et la vitesse c du signal est la même pour tous les satellites).

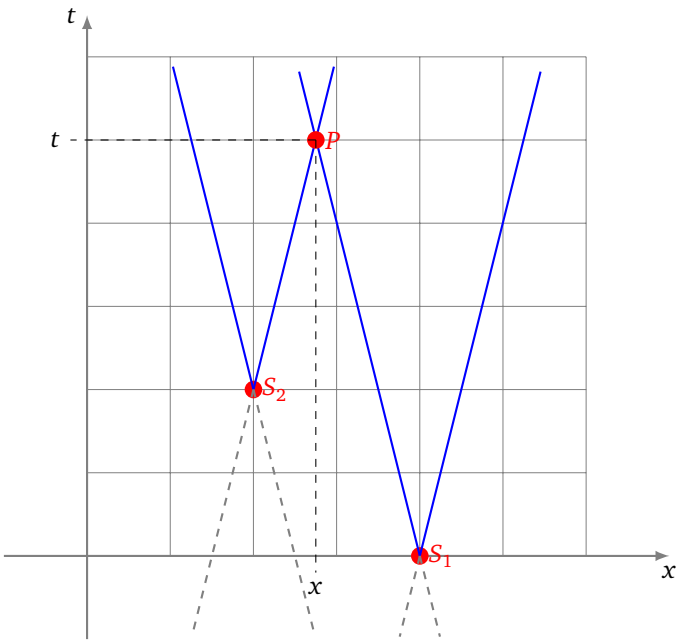
Remarque : dans l'introduction les signaux (les cornes de brume) étaient émis tous en même temps mais perçus à des instants différents. Ici la situation est différente : on perçoit deux signaux au même instant t, mais l'un des signaux en émis au temps t_1 et l'autre au temps t_2. Le signal contient comme information l'instant où il a été émis. En fait, chaque satellite émet en continu un signal et le récepteur capte en continu des signaux.

Exemple 3.
Je reçois le signal d'un premier satellite, en position $x_1 = 4$, signal émis au temps $t_1 = 0$. Au même instant je reçois le signal d'un second satellite, en position $x_2 = 2$, signal émis au temps $t_2 = 2$. Les signaux se déplacent à une vitesse $c = \frac{1}{4}$. Où suis-je ?

Le problème algébrique est de trouver un couple (x,t) qui vérifie les deux équations,

$$|x - x_1| = c|t - t_1| \qquad \text{et} \qquad |x - x_2| = c|t - t_2|$$

Cherchons graphiquement la solution. On trace le cône de sommet (x_1, t_1) et de pente $\frac{1}{c} = 4$ et le cône de sommet (x_2, t_2) et de même pente. Ces deux cônes s'intersectent en deux points, l'un est exclu car il correspond à une solution «dans le passé». Par lecture graphique on trouve notre position $x \simeq 2{,}7$ et l'heure de réception des messages $t \simeq 5$



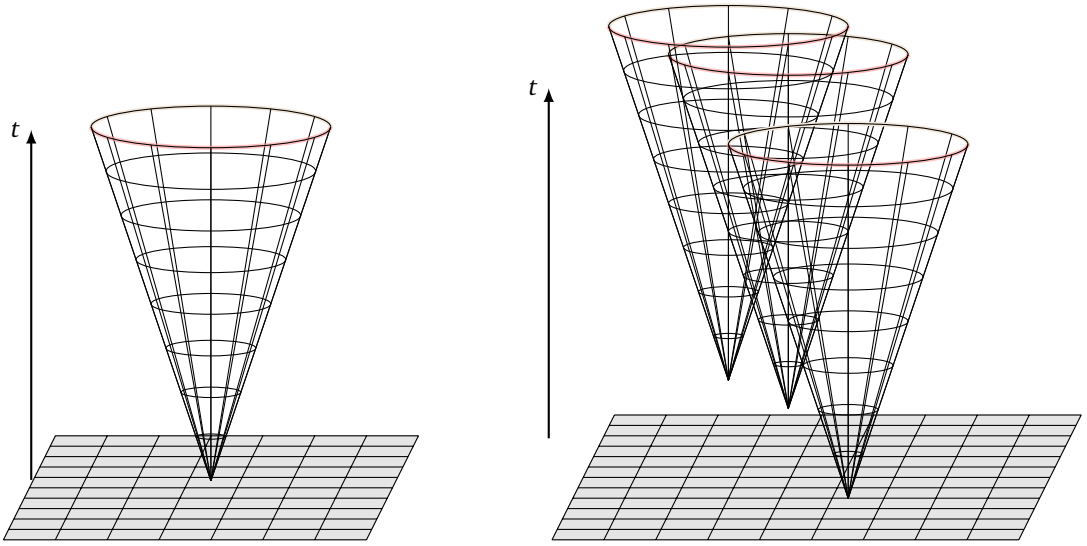
Par calcul algébrique on cherche l'intersection des droites d'équations $+(x-2)=\frac{1}{4}(t-2)$ et $-(x-4)=\frac{1}{4}t$. On trouve $(x,t)=(\frac{11}{4},5)$, donc $x=2{,}75$ et $t=5$.

3.3. Vision géométrique (dimension 2 et 3)

Si maintenant on passe en dimension 2, alors le signal reçu par un satellite correspond à l'équation

$$(x-x_i)^2+(y-y_i)^2=c^2(t-t_i)^2$$

où (x_i,y_i) est la position du signal, et t_i l'instant où le signal est émis ; (x,y) est notre position et t l'instant où le signal est reçu. Géométriquement le signal voyage le long d'un cône (en dimension 3 cette fois : 2 dimension pour x et y, 1 dimension pour t). Ce cône correspond à un cercle qui s'agrandit au fil du temps.



Deux cônes ne suffisent pas à déterminer notre position. Il faut 3 satellites, et donc 3 cônes, pour déterminer à la fois (x,y) et t.

Il est difficile de se représenter la situation en dimension 3, qui est la dimension d'usage : il faudrait « voir » avec 4 dimensions (pour x,y,z et t). Le signal part du satellite, et à chaque instant atteint tous les points d'une sphère, dont le rayon grandit au cours du temps. Les inconnues sont (x,y,z) et t. Il faut 4 satellites pour déterminer à la fois (x,y,z) et t.

3.4. Solution vectorielle

Nous venons de voir qu'une solution géométrique n'a rien d'évident ! C'est là où le calcul vectoriel entre en jeu. Nous allons reprendre la solution vectorielle détaillée auparavant en dimension 2 (les inconnues étaient x et y) et voir que la démarche fonctionne avec 4 inconnues (x,y,z,t).
Nous voulons déterminer notre position dans l'espace et le temps à partir de 4 signaux reçus :

- notre position est (x,y,z,t),
- les satellites sont situés en (x_i,y_i,z_i),
- chaque signal que nous recevons a été émis à l'instant t_i,
- $i=1,2,3,4$.

Chaque signal correspond à l'équation :

$$(x-x_i)^2+(y-y_i)^2+(z-z_i)^2=c^2(t-t_i)^2$$

que l'on développe :

$$2xx_i+2yy_i+2zz_i-2c^2tt_i=x^2+y^2+z^2-c^2t^2+x_i^2+y_i^2+z_i^2-c^2t_i^2$$

On pose alors

$$A=\begin{pmatrix}2x_1 & 2y_1 & 2z_1 & -2c^2t_1\\ 2x_2 & 2y_2 & 2z_2 & -2c^2t_2\\ 2x_3 & 2y_3 & 2z_3 & -2c^2t_3\\ 2x_4 & 2y_4 & 2z_4 & -2c^2t_4\end{pmatrix}\quad X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}\quad U=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}\quad V=\begin{pmatrix}x_1^2+y_1^2+z_1^2-c^2t_1^2\\ x_2^2+y_2^2+z_2^2-c^2t_2^2\\ x_3^2+y_3^2+z_3^2-c^2t_3^2\\ x_4^2+y_4^2+z_4^2-c^2t_4^2\end{pmatrix}\quad B=(x^2+y^2+z^2-c^2t^2)U+V$$

Nos équations s'écrivent simplement

$$AX=B \tag{4}$$

Si A est inversible et si on connaît B, alors $X=A^{-1}B$ où $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}$ est la position à déterminer dans l'espace-temps. Le problème est toujours le même, B dépend de (x,y,z,t), où plus précisément de $d=x^2+y^2+z^2-c^2t^2$, On calcule comme auparavant que :

$$d=\langle X\mid X\rangle_\ell=\langle A^{-1}B\mid A^{-1}B\rangle_\ell=d^2\|A^{-1}U\|_\ell^2+2d\langle A^{-1}U\mid A^{-1}V\rangle_\ell+\|A^{-1}V\|_\ell^2$$

Ainsi, d vérifie l'équation du second degré :

$$\|A^{-1}U\|_\ell^2d^2+\big(2\langle A^{-1}U\mid A^{-1}V\rangle_\ell-1\big)d+\|A^{-1}V\|_\ell^2=0 \tag{5}$$

Attention ! Ici le produit scalaire est « tordu » : $\langle X\mid X'\rangle_\ell=xx'+yy'+zz'-c^2tt'$ et la norme au carré $\|X\|_\ell^2=\langle X\mid X\rangle_\ell=x^2+y^2+z^2-c^2t^2$ n'est plus nécessairement positive.
Il y a au plus deux solutions, notées d_1 et d_2, donc deux seconds membres possibles pour le second membre de (4) :

$$B_1=d_1U+V\quad\text{ ou }\quad B_2=d_2U+V.$$

Ainsi on résout deux systèmes linéaires $AX=B_1$ et $AX=B_2$, ce qui donne deux solutions $X=A^{-1}B_1$ et $X=A^{-1}B_2$. On obtient deux solutions possibles pour notre position $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}$. Pour choisir quelle solution est la bonne, on peut exclure une solution qui serait non réaliste, ou refaire les calculs avec un cinquième satellite, ou recommencer les mesures plus tard.

4. Vitesse

4.1. Formule par dérivation

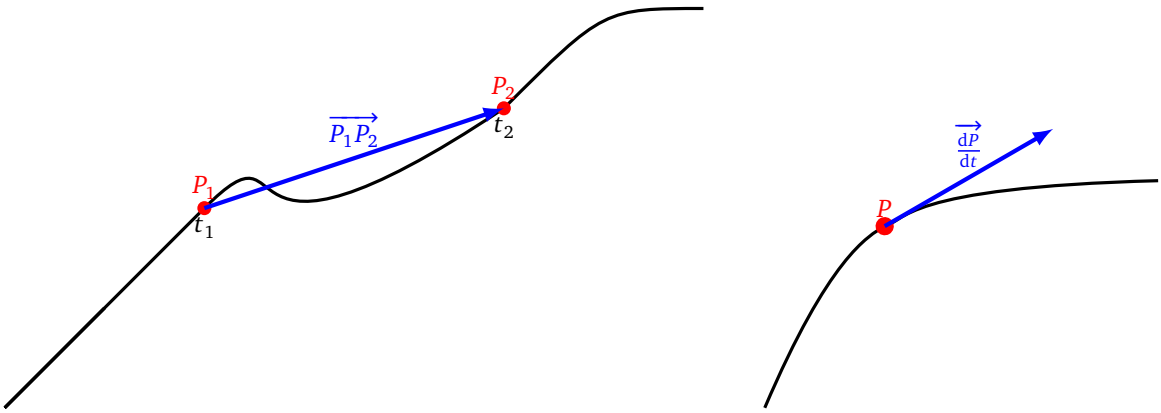
L'idée naturelle est de déterminer la vitesse par un calcul à partir des positions. On note P le point où l'on se trouve, on a vu comment déterminer les coordonnées (x,y,z) de P à l'aide des satellites. La position P varie, on note $P(t)=\big(x(t),y(t),z(t)\big)$ les coordonnées de P en fonction du temps. Comment calculer la vitesse ? Si P décrit un trajet rectiligne de longueur, disons 5 km, en un temps d'une heure alors la vitesse moyenne est de

$$v=\frac{\text{distance}}{\text{durée}}=5\,\text{km/h}.$$

Plus généralement si on va du point P_1 au point P_2 entre les instants t_1 et t_2 alors la vitesse moyenne et le vecteur vitesse moyenne sont :

$$v=\frac{\Delta P}{\Delta t}=\frac{P_1P_2}{t_2-t_1}\qquad\text{et}\qquad\overrightarrow{v}=\frac{\Delta\overrightarrow{P}}{\Delta t}=\frac{\overrightarrow{P_1P_2}}{t_2-t_1}$$

En fait v est la norme $\|\overrightarrow{v}\|$ (si $t_2>t_1$).



Pour obtenir la vitesse instantanée il faut réduire l'intervalle de temps : passer d'une grand intervalle de temps Δt, à un petit intervalle $\mathrm{d}t$. Physiquement, la vitesse (instantanée) se calcule par

$$\overrightarrow{v}=\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{P}}{\mathrm{d}t}=\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t},\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t},\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)$$

Mathématiquement, le $\mathrm{d}t$ est infinitésimal, et diviser par $\mathrm{d}t$ correspond à la dérivation :

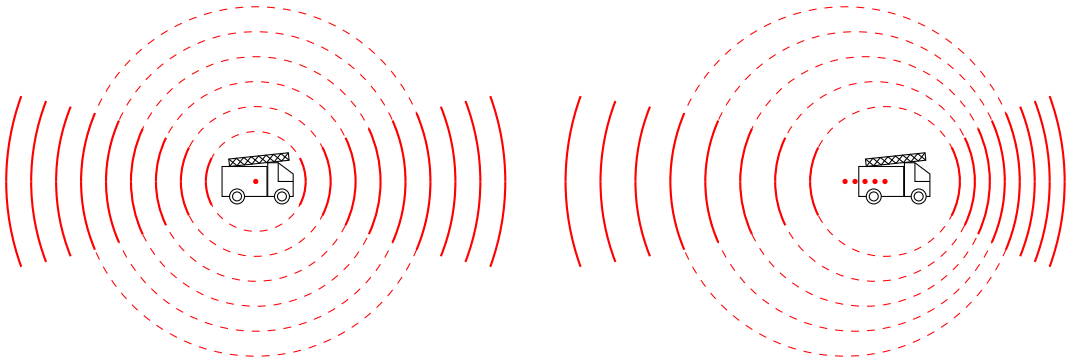
$$\overrightarrow{v}=P'(t)=\big(x'(t),y'(t),z'(t)\big)$$

On calcule comme auparavant $v=\|\overrightarrow{v}\|$.

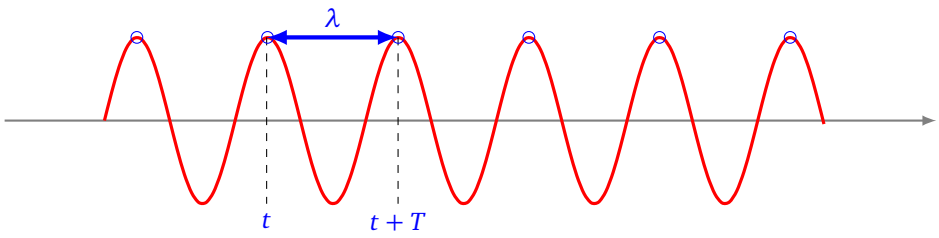
Dans la pratique que l'on soit à pied, en bateau ou en voiture on avance quasiment en ligne droite au moins sur des périodes de quelques secondes. Ce qui est largement suffisant pour approcher la vitesse instantanée par la vitesse moyenne sur ce court laps de temps. Cependant nous allons voir une méthode beaucoup plus précise.

4.2. Effet Doppler

L'effet Doppler est le fameux effet de la sirène des pompiers : lorsque la sirène des pompiers s'approche droit sur vous, le son est plus aigu, puis lorsque la sirène s'éloigne le son est plus grave. Ce phénomène n'est pas lié à la distance de la sirène, mais bien à la vitesse de déplacement de cette sirène. (Si le camion s'arrête vous entendrez le même son que vous soyez à 10 ou 100 mètres.)



On rappelle que la ***période*** T d'une onde est le temps qui s'écoule entre deux crêtes du signal. Pour simplifier l'exposé on suppose que les signaux sont des «bips» émis à chaque crête, avec un intervalle de temps T entre deux signaux. La ***longueur d'onde*** λ est la distance entre deux crêtes, si le signal se déplace à une vitesse c alors : $\lambda = cT$. Enfin, la ***fréquence*** f d'une onde est l'inverse de la période T : $f = \frac{1}{T}$. La fréquence est donc le nombre de bips par seconde.



La formule de Doppler relie la fréquence émise par le satellite (qui remplace la sirène des pompiers), et celle reçue en notre position P. On note f_S la fréquence d'émission du satellite (qui est une constante connue), on note f_P la fréquence du signal mesurée au point P.

Théorème 2 (Effet Doppler)**.**
*Dans le cas où P est fixe, l'***effet Doppler*** se traduit par la formule suivante :*

$$f_P = \frac{1}{1 + \frac{v_S}{c}} f_S$$

On a noté :

- c la vitesse de déplacement du signal (la vitesse de la lumière dans le cas du signal émis par le satellite, la vitesse du son pour la sirène des pompiers) ;
- v_S la vitesse d'éloignement de S dans la direction de P (vitesse positive si le satellite s'éloigne, vitesse négative s'il se rapproche).

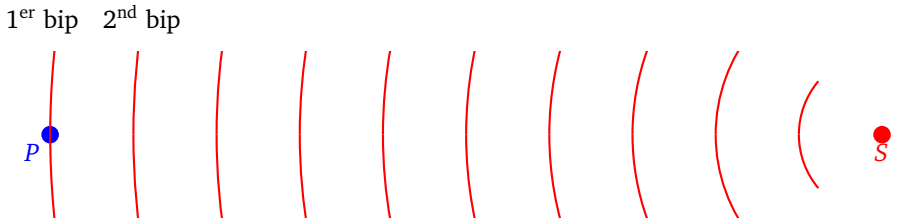
Exemple 4.
Un camion de pompier se rapproche à un vitesse de 33 m/s (environ 120 km/h), sa sirène émet à la fréquence $f_S = 440$ Hz. Sachant que la vitesse de déplacement du son dans l'air est $c = 333$ m/s, quelle est la fréquence perçue par un piéton ?

Réponse. Il s'agit juste d'appliquer la formule de l'effet Doppler, en prenant garde que puisque le camion se rapproche la vitesse d'éloignement est négative : $v_S = -33$ m/s

$$f_P = \frac{1}{1 + \frac{v_S}{c}} f_S = \frac{1}{1 - \frac{33}{333}} 440 = 488{,}4 \text{ hertz}$$

Le son perçu est plus aigu que le son émis.

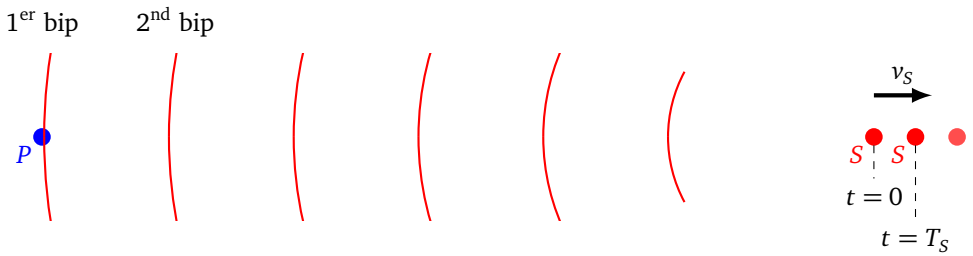
Démonstration. Commençons par bien comprendre la situation dans le cas où rien ne bouge. S émet un signal de fréquence f_S. Notons $T_S = \frac{1}{f_S}$ la période du signal



Au repos la situation est simple, au temps $t = 0$, S émet son premier bip, ce signal voyage à la vitesse c jusqu'à P. Si d est la distance entre P et S alors le signal arrivera au temps $T_0 = \frac{d}{c}$. Mais entre temps, S a émis un deuxième bip à l'instant T_S (un bip est émis en $t = 0$, en $t = T_S$, $t = 2T_S$...). Ce deuxième bip a la même distance à parcourir, donc il met le même temps pour arriver en P. Il arrive donc au temps $T_1 = T_S + T_0$ (n'oubliez pas qu'il est parti plus tard). Le décalage entre deux bips au départ est de T_S et à l'arrivée c'est $T_P = T_1 - T_0 = T_S$. C'est bien le même décalage. Autrement dit, la fréquence reçue est égale à la fréquence émise.

	S	P
1er bip	0	T_0
2nd bip	T_S	$T_1 = T_0 + T_S$
Décalage	T_S	$T_1 - T_0 = T_S$

Passons au cas intéressant : S s'éloigne avec une vitesse v_S. Le premier bip est émis par S au temps $t = 0$, le second au temps $t = T_S$. Le premier bip est reçu en P à un certain instant T_0 après avoir parcouru une distance d (et alors $T_0 = \frac{d}{c}$).



Le second bip n'a pas la même distance à parcourir, en effet entre $t = 0$ et $t = T_S$, la source s'est éloignée. La distance à parcourir par le second bip est donc de $d' = d + v_S T_S$. Il arrive en P au temps $T_1 = T_S + \frac{d'}{c}$:

$$T_1 = T_S + \frac{d'}{c} = T_S + \frac{d + v_S T_S}{c} = T_S + T_0 + \frac{v_S}{c} T_S = T_0 + T_S\left(1 + \frac{v_S}{c}\right)$$

L'écart à la réception des bips est donc $T_P = T_1 - T_0 = T_S\left(1 + \frac{v_S}{c}\right)$.

	S	P
1^{er} bip	0	T_0
2^{nd} bip	T_S	$T_1 = T_0 + \left(1 + \frac{v_S}{c}\right) T_S$
Décalage	T_S	$T_1 - T_0 = \left(1 + \frac{v_S}{c}\right) T_S$

Pour les fréquences $f_P = \frac{1}{T_P}$ et $f_S = \frac{1}{T_S}$ on trouve la relation de Doppler :

$$f_P = \frac{1}{1 + \frac{v_S}{c}} f_S$$

□

Proposition 2.
Dans le cas où P se déplace avec une vitesse v_P et S avec une vitesse v_S, la formule de Doppler est :

$$f_P = \frac{1 + \frac{v_P}{c}}{1 + \frac{v_S}{c}} f_S$$

Les deux vitesses sont comptées positivement selon le sens $\overrightarrow{PS}$.

La preuve est similaire mais un peu plus subtile. Entre le premier et le second bip *émis*, la source S s'est éloignée de $v_S T_S$. Entre le premier et le second bip *reçu*, le récepteur P s'est approché de $v_P T_P$ (donc compte pour $-v_P T_P$). On trouve donc $d' = d + v_S T_S - v_P T_P$ et $T_1 = T_S + \frac{d'}{c}$. On veut calculer $T_P = T_1 - T_0$ On trouve ainsi la relation :

$$T_P = T_S + \frac{v_S}{c} T_S - \frac{v_P}{c} T_P$$

Donc

$$\left(1 + \frac{v_P}{c}\right) T_P = \left(1 + \frac{v_S}{c}\right) T_S.$$

Ce qui donne le lien entre f_P et f_S.

4.3. Approximation de l'effet Doppler

La constante c est la vitesse de déplacement du signal, ce sera pour nous la vitesse du son (dans le cas de la sirène) ou la vitesse de la lumière (dans le cas du signal d'un satellite). Dans tous les cas les vitesses de déplacement v_P et v_S sont négligeables devant c, ainsi $\frac{v_S}{c}$ et $\frac{v_P}{c}$ sont très petits. On utilise le développement limité à l'ordre 1, autour de $x = 0$:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + o(x)$$

Ce qui donne

$$f_P = f_S \frac{1 + \frac{v_P}{c}}{1 + \frac{v_S}{c}} \simeq f_S \left(1 + \frac{v_P}{c}\right)\left(1 - \frac{v_S}{c}\right) \simeq f_S \left(1 + \frac{v_P}{c} - \frac{v_S}{c}\right)$$

Donc si on note $v = v_S - v_P$, la vitesse relative de P par rapport à S, alors l'effet Doppler approché se traduit en :

$$\boxed{f_P \simeq f_S \left(1 - \frac{v}{c}\right)}$$

Exemple 5.
Reprenons l'exemple 4 du camion de pompier émettant un son $f_S = 440\,\text{Hz}$ en approche à une vitesse $v_S = -33\,\text{m/s}$.
Alors la formule d'approximation de l'effet Doppler est :

$$f_P \simeq f_S\left(1-\frac{v}{c}\right) = 440\left(1-\frac{-33}{333}\right) \simeq 483{,}6\,\text{hertz}$$

Avec la formule exacte on avait trouvé 488,4 hertz. L'approximation est assez moyenne, car la vitesse v_S n'est pas assez petite par rapport à la vitesse du son c. Lorsque c sera la vitesse de la lumière, toutes les vitesses de déplacement des objets seront négligeables.

4.4. Le décalage Doppler

Voyons comment récupérer la vitesse par la mesure des fréquences. Le signal émis et sa fréquence f_S sont connus. La fréquence mesurée f_P, nous permet de déduire la vitesse. On note $D = f_S - f_P$ le ***décalage Doppler***. Dans le cas où P est fixe et S se déplace à une vitesse v_S, alors la formule de Doppler $f_P = \frac{1}{1+\frac{v_S}{c}} f_S$ implique

$$v_S = \frac{cD}{f_P}$$

Dans le cas plus général où P et S sont en mouvement et que $v = v_S - v_P$ est la vitesse de S par rapport à P, alors l'approximation $f_P \simeq f_S\left(1-\frac{v}{c}\right)$ conduit à :

$$\boxed{v \simeq \frac{cD}{f_S}}$$

C'est donc une approximation raisonnable de dire que la vitesse est proportionnelle au décalage Doppler.

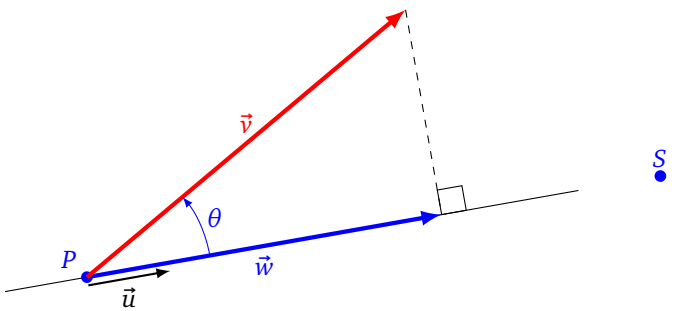
4.5. Vitesse d'éloignement

Il faut faire bien attention que l'effet Doppler ne prend en compte que la vitesse d'éloignement (ou de rapprochement). Rappelons que P est le point où l'on est et S la position du satellite. On note $\overrightarrow{u}$ un vecteur unité de P vers S : $\overrightarrow{u} = \frac{\overrightarrow{PS}}{\|\overrightarrow{PS}\|}$. Supposons pour l'instant que P soit fixe et S se déplace dans n'importe quelle direction, son vecteur vitesse étant noté $\overrightarrow{v}$.

Définition 1.
La ***vitesse d'éloignement*** est la composante de la vitesse le long de droite (PS) reliant notre position au satellite. Mathématiquement $\overrightarrow{w}$ est la projection de $\overrightarrow{v}$ sur la droite $\mathbb{R}\overrightarrow{u}$, c'est-à-dire :

$$\overrightarrow{w} = \langle \overrightarrow{v} | \overrightarrow{u} \rangle \overrightarrow{u} = \|\overrightarrow{v}\| \cos\theta \cdot \overrightarrow{u}$$

où θ est l'angle formé par $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.



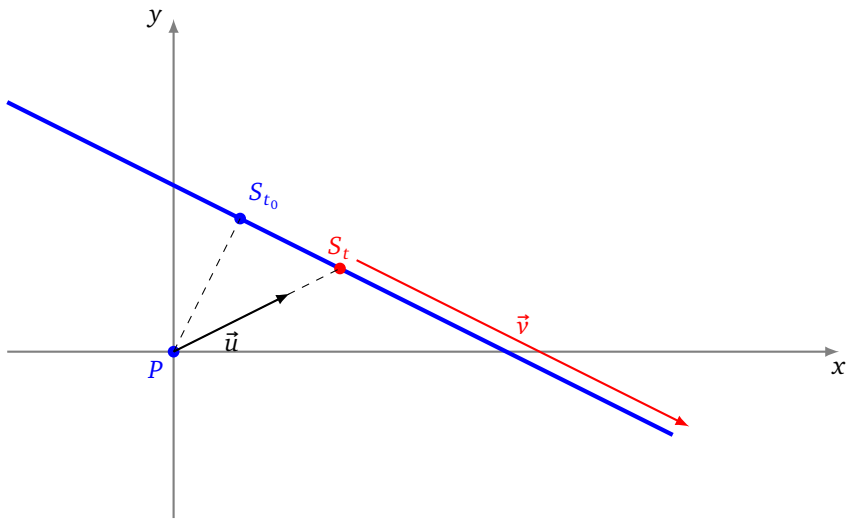
On aura besoin de la mesure de la vitesse :

$$w = \langle \overrightarrow{v} | \overrightarrow{u} \rangle = \| \overrightarrow{v} \| \cos\theta$$

Attention ! w a un signe : positif si le satellite s'éloigne, négatif s'il se rapproche. Si P et S se déplacent tous les deux, ayant des vecteurs vitesses $\overrightarrow{v_P}$ et $\overrightarrow{v_S}$ quelconques. Notons $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v_S} - \overrightarrow{v_P}$ le vecteur vitesse relative de S par rapport à P. Dans ce cas, la vitesse d'éloignement est définie par rapport à ce vecteur $\overrightarrow{v}$: $\overrightarrow{w} = \langle \overrightarrow{v} | \overrightarrow{u} \rangle \overrightarrow{u}$. L'effet Doppler ne permet pas de déterminer $\overrightarrow{v}$, mais seulement $\overrightarrow{w}$.

Exemple 6.

Nous sommes immobiles au point $P = (0,0)$. Le point S se déplace sur la droite d'équation $x + 2y - 2 = 0$ à une vitesse constante $\overrightarrow{v} = (2,-1)$. On commence par déterminer une équation paramétrique de la droite : $S_t = (2t+2, -t)$.



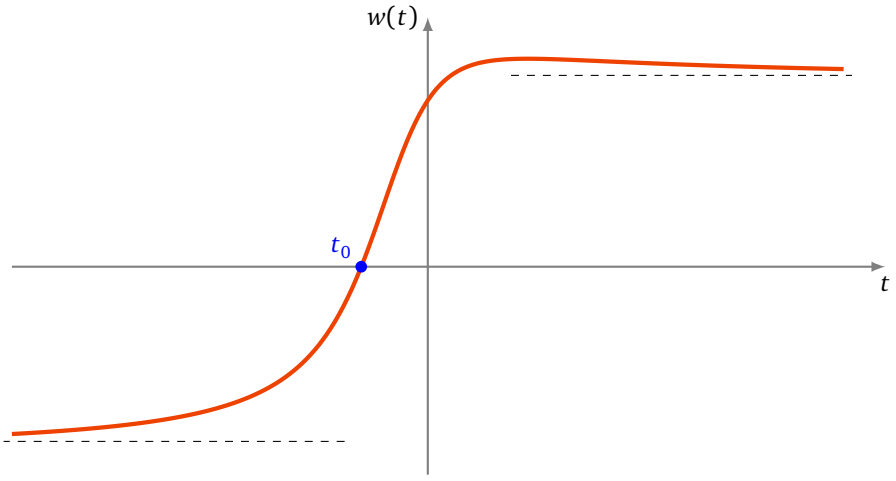
Le vecteur unité pointant vers S_t est :

$$\overrightarrow{u} = \frac{\overrightarrow{PS_t}}{\|\overrightarrow{PS_t}\|} = \frac{(2t+2,-t)}{\|(2t+2,-t)\|} = \frac{1}{\sqrt{5t^2+4t+4}}(2t+2,-t)$$

Calculons la vitesse d'éloignement :

$$\overrightarrow{w} = \langle \overrightarrow{v} | \overrightarrow{u} \rangle \overrightarrow{u} = \left\langle (2,-1) | \frac{1}{\sqrt{5t^2+4t+4}}(2t+2,-t) \right\rangle \overrightarrow{u} = \frac{5t+4}{\sqrt{5t^2+4t+4}} \overrightarrow{u}$$

Voici le graphe de la fonction $w = w(t) = \frac{5t+4}{\sqrt{5t^2+4t+4}}$.



Lorsque t varie de $-\infty$ à t_0, la vitesse est négative donc S_t se rapproche ; puis de t_0 à $+\infty$, la vitesse d'éloignement devient positive, S_t s'éloigne. Le satellite est au plus proche de nous en $t_0 = -\frac{4}{5}$. Le décalage

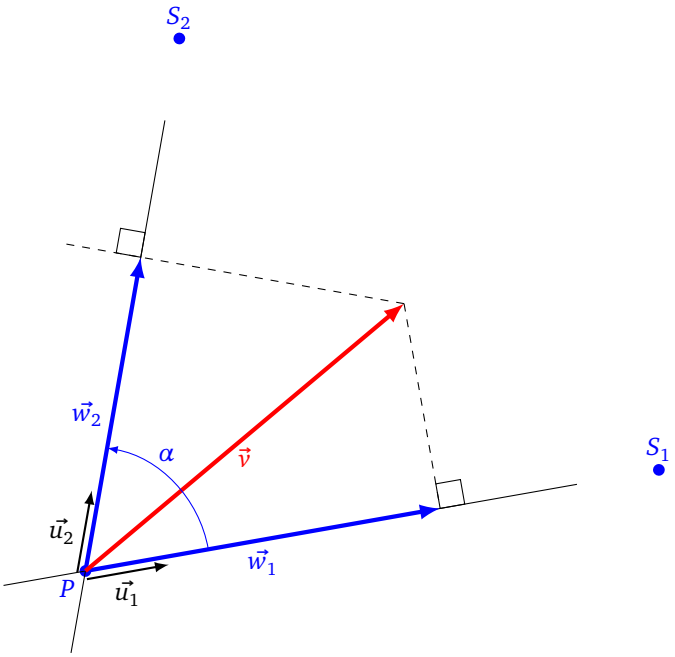
Doppler D, qui est proportionnel à w, permet bien de calculer w, mais pas v. C'est clair sur cet exemple où la vitesse de S est constante, mais pas sa vitesse d'éloignement.

4.6. Vitesse par l'effet Doppler (2D)

On a vu que l'effet Doppler avec un seul satellite ne permet de calculer que la composante de la vitesse dans une seule direction. Pour obtenir complètement la vitesse on utilise plusieurs satellites. Commençons par le cas d'un modèle en deux dimensions. On note toujours P notre position et S_1, S_2 les positions des 2 satellites. Cette fois on considère que ce sont les satellites qui sont fixes, alors que le point P se déplace selon une vitesse $\overrightarrow{v}$ à déterminer.
Les vecteurs unités pointant vers chaque satellite sont $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$. On suppose que les points P, S_1, S_2 ne sont pas alignés. On connaît chacune des vitesses d'éloignement $w_i = \langle \overrightarrow{v} | \overrightarrow{u_i} \rangle$. Mais attention le vecteur $\overrightarrow{v}$ n'est pas égal à $w_1\overrightarrow{u_1} + w_2\overrightarrow{u_2}$, car il n'y a aucune raison que les vecteurs $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$ soient orthogonaux. Notons α l'angle entre les vecteurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$.

Proposition 3.

$$\overrightarrow{v} = \frac{w_1 - w_2 \cos\alpha}{\sin^2\alpha}\overrightarrow{u_1} + \frac{w_2 - w_1\cos\alpha}{\sin^2\alpha}\overrightarrow{u_2}$$



Rappelons que les vecteurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ sont connus par la positions de P et des satellites, donc $\cos\alpha = \langle \overrightarrow{u_1} | \overrightarrow{u_2} \rangle$ est aussi connu. Par contre w_1 et w_2 sont déterminés par les décalages Doppler par rapport à chacun des satellites : $w_1 \simeq c\frac{D_1}{f_{S_1}}$ et $w_2 \simeq c\frac{D_2}{f_{S_2}}$.

Démonstration. On cherche donc x_1, x_2 tels que $\overrightarrow{v} = x_1\overrightarrow{u_1} + x_2\overrightarrow{u_2}$. On a les équations :

$$\begin{cases} \langle \overrightarrow{v} | \overrightarrow{u_1} \rangle &= \langle x_1\overrightarrow{u_1} + x_2\overrightarrow{u_2} | \overrightarrow{u_1} \rangle \\ \langle \overrightarrow{v} | \overrightarrow{u_2} \rangle &= \langle x_1\overrightarrow{u_1} + y_2\overrightarrow{u_2} | \overrightarrow{u_2} \rangle \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} w_1 &= x_1 + x_2\langle \overrightarrow{u_1} | \overrightarrow{u_2} \rangle \\ w_2 &= x_1\langle \overrightarrow{u_1} | \overrightarrow{u_2} \rangle + x_2 \end{cases}$$

Où l'on s'est souvenu que $\langle \overrightarrow{u_i} | \overrightarrow{u_i} \rangle = \|\overrightarrow{u_i}\|^2 = 1$. C'est un système linéaire où les données sont w_1, w_2, $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$, les inconnues sont x_1, x_2. On le réécrit sous la forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \langle \overrightarrow{u_1} | \overrightarrow{u_2} \rangle \\ \langle \overrightarrow{u_1} | \overrightarrow{u_2} \rangle & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

En notant

$$A=\begin{pmatrix}1 & \langle\overrightarrow{u_1}|\overrightarrow{u_2}\rangle\\ \langle\overrightarrow{u_1}|\overrightarrow{u_2}\rangle & 1\end{pmatrix} \quad \text{on a donc} \quad \begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=A^{-1}\begin{pmatrix}w_1\\w_2\end{pmatrix}$$

Et si on note α l'angle entre les vecteurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ alors $\langle\overrightarrow{u_1}|\overrightarrow{u_2}\rangle=\cos\alpha$, d'où :

$$A=\begin{pmatrix}1 & \cos\alpha\\ \cos\alpha & 1\end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad A^{-1}=\frac{1}{1-\cos^2\alpha}\begin{pmatrix}1 & -\cos\alpha\\ -\cos\alpha & 1\end{pmatrix}=\frac{1}{\sin^2\alpha}\begin{pmatrix}1 & -\cos\alpha\\ -\cos\alpha & 1\end{pmatrix}$$

On trouve donc

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\frac{1}{\sin^2\alpha}\begin{pmatrix}w_1-w_2\cos\alpha\\ w_2-w_1\cos\alpha\end{pmatrix}$$

Ce qui donne

$$\overrightarrow{v}=\frac{w_1-w_2\cos\alpha}{\sin^2\alpha}\overrightarrow{u_1}+\frac{w_2-w_1\cos\alpha}{\sin^2\alpha}\overrightarrow{u_2}$$

□

Si on souhaite calculer la norme de $\overrightarrow{v}=x_1\overrightarrow{u_1}+x_2\overrightarrow{u_2}$, il faut encore faire attention que l'on n'est pas dans une base orthonormée :

$$\|\overrightarrow{v}\|^2=\langle\overrightarrow{v}|\overrightarrow{v}\rangle=\langle x_1\overrightarrow{u_1}+x_2\overrightarrow{u_2}|x_1\overrightarrow{u_1}+x_2\overrightarrow{u_2}\rangle=x_1^2+x_2^2+2x_1x_2\langle\overrightarrow{u_1}|\overrightarrow{u_2}\rangle$$

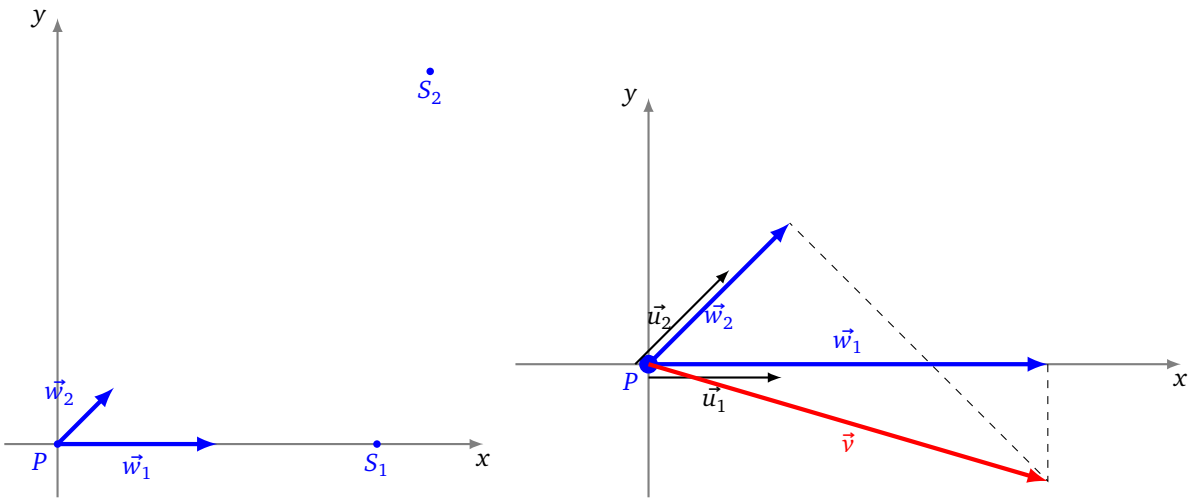
Ce qui donne pour nous après développement et simplifications :

$$v=\|\overrightarrow{v}\|=\frac{1}{|\sin\alpha|}\sqrt{w_1^2+w_2^2-2w_1w_2\cos\alpha}$$

Exemple 7.
Voici des données :

$$P(0,0) \qquad S_1(6,0) \qquad S_2(7,7) \qquad w_1=3 \qquad w_2=\frac{3}{2}$$

À quelle vitesse se déplace P et dans quelle direction ?



Les vecteurs unités pointant vers les satellites sont $\overrightarrow{u_1}=(1,0)$ et $\overrightarrow{u_2}=(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$. Ce qui donne $\langle\overrightarrow{u_1}|\overrightarrow{u_2}\rangle=\frac{\sqrt{2}}{2}$.
Si la vitesse cherchée s'écrit $\overrightarrow{v}=x_1\overrightarrow{u_1}+x_2\overrightarrow{u_2}$, alors

$$\begin{cases} w_1=\langle\overrightarrow{v}|\overrightarrow{u_1}\rangle &= \langle x_1\overrightarrow{u_1}+x_2\overrightarrow{u_2}|\overrightarrow{u_1}\rangle\\ w_2=\langle\overrightarrow{v}|\overrightarrow{u_2}\rangle &= \langle x_1\overrightarrow{u_1}+y_2\overrightarrow{u_2}|\overrightarrow{u_2}\rangle\end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{pmatrix}w_1\\w_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & \frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$$

Ainsi

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & \frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}w_1\\w_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -\sqrt{2}\\ -\sqrt{2} & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\ \frac{3}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6-\frac{3}{2}\sqrt{2}\\ 3-3\sqrt{2}\end{pmatrix}$$

Mais attention, on vient de calculer les coordonnées de $\overrightarrow{v}$ dans la base $(\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2})$. Dans la base canonique $\big((1,0),(0,1)\big)$, on trouve

$$\overrightarrow{v} = (6-\frac{3}{2}\sqrt{2})\overrightarrow{u_1} + (3-3\sqrt{2})\overrightarrow{u_2} = (6-\frac{3}{2}\sqrt{2})(1,0) + (3-3\sqrt{2})(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}) = 3(1,0) + (-3+\frac{3}{2}\sqrt{2})(0,1)$$

Les coordonnées de $\overrightarrow{v}$ dans la base canonique sont donc $(3,-3+2\sqrt{2})$.

4.7. Vitesse par l'effet Doppler (3D)

Revenons en dimension 3, l'idée est exactement la même avec une coordonnée de plus, ce qui va juste compliquer un peu les expressions. Par contre, on se place dans une situation plus réaliste : tout le monde bouge ! On note toujours P notre position et $\overrightarrow{v}$ notre vitesse et on considère 3 satellites de position S_1, S_2, S_3 et de vitesse respective $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$, $\overrightarrow{v_3}$.
Les vecteurs unités pointant de P vers chaque satellite sont $\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{u_2}$, $\overrightarrow{u_3}$. Supposons que les 4 points P, S_1, S_2, S_3 ne soient pas dans un même plan, alors les vecteurs $(\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2},\overrightarrow{u_3})$ forment une base de $\mathbb{R}^3$. On cherche l'expression de $\overrightarrow{v}$ dans cette base :

$$\overrightarrow{v} = x_1\overrightarrow{u_1} + x_2\overrightarrow{u_2} + x_3\overrightarrow{u_3}.$$

Cette fois le décalage Doppler avec chaque satellite calcule la vitesse relative :

$$w_i = \langle \overrightarrow{v} - \overrightarrow{v_i} | \overrightarrow{u_i} \rangle$$

Ce qui donne :

$$\langle \overrightarrow{v} | \overrightarrow{u_i} \rangle = w_i + \langle \overrightarrow{v_i} | \overrightarrow{u_i} \rangle$$

On remplace $\overrightarrow{v}$ par son expression $\overrightarrow{v} = x_1\overrightarrow{u_1} + x_2\overrightarrow{u_2} + x_3\overrightarrow{u_3}$ et en écrivant $y_i = w_i + \langle \overrightarrow{v_i} | \overrightarrow{u_i} \rangle$, on obtient le système linéaire :

$$\begin{cases} x_1 + x_2\langle \overrightarrow{u_1} | \overrightarrow{u_2} \rangle + x_3\langle \overrightarrow{u_1} | \overrightarrow{u_3} \rangle &= y_1 \\ x_1\langle \overrightarrow{u_1} | \overrightarrow{u_2} \rangle + x_2 + x_3\langle \overrightarrow{u_2} | \overrightarrow{u_3} \rangle &= y_2 \\ x_1\langle \overrightarrow{u_1} | \overrightarrow{u_3} \rangle + x_2\langle \overrightarrow{u_2} | \overrightarrow{u_3} \rangle + x_3 &= y_3 \end{cases}$$

Qui s'écrit

$$A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & \langle \overrightarrow{u_1} | \overrightarrow{u_2} \rangle & \langle \overrightarrow{u_1} | \overrightarrow{u_3} \rangle \\ \langle \overrightarrow{u_1} | \overrightarrow{u_2} \rangle & 1 & \langle \overrightarrow{u_2} | \overrightarrow{u_3} \rangle \\ \langle \overrightarrow{u_1} | \overrightarrow{u_3} \rangle & \langle \overrightarrow{u_2} | \overrightarrow{u_3} \rangle & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice A s'inverse sans problème (son expression n'a rien de spéciale mais est un peu longuette à écrire), on en déduirait donc

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

Revenons à notre but calculer notre vitesse. Les signaux des satellites permettent de :

- calculer notre position P,
- savoir la position de chaque satellite et sa vitesse (elle est transmise dans le signal) donc on connaît les $\overrightarrow{u_i}$ et les $\overrightarrow{v_i}$,
- mesurer le décalage des fréquences, ce qui nous donne les vitesses relatives w_i.

Ainsi on connaît la matrice A et les $y_i = w_i + \langle \overrightarrow{v_i} | \overrightarrow{u_i} \rangle$. Ce qui permet d'en déduire les x_i et $\overrightarrow{v} = x_1\overrightarrow{u_1} + x_2\overrightarrow{u_2} + x_3\overrightarrow{u_3}$. On peut aussi en déduire la norme de la vitesse comme précédemment $v = \|\overrightarrow{v}\|$ (en faisant toujours attention que la base $(\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2},\overrightarrow{u_3})$ n'est pas orthogonale).

4.8. Pratique et précision

Voici des données utiles pour avoir un ordre de grandeur des calculs et de la précision.

- Les satellites sont sur des orbites quasi-circulaire d'un rayon de 26 500 km (donc à 20 000 km d'altitude). La période de rotation est d'environ 12 h. En calculant la circonférence on trouve que la vitesse du satellite est d'environ 13 868 km/h, soit environ 3850 m/s. En fait cette vitesse varie au cours du temps, mais est connue avec une grande précision car l'éphéméride du satellite est transmise dans le signal. Cela permet de calculer précisément la position et la vitesse du satellite.
- Pour nous c sera la vitesse de la lumière : $c = 300\,000$ km/s.
- Notre vitesse v_P est située entre 0 et 1000 km/h (donc de 0 à 280 m/s).
- Chaque satellite émet en fait deux signaux simultanément. On considère celui d'une fréquence de $f_S = 1575{,}42$ MHz.

Exemple 8.
Le récepteur GPS d'un avion enregistre un signal de fréquence $f_P = 1575{,}40$ MHz pour un satellite dont la vitesse d'éloignement est $v_S = 4000{,}00$ m/s. À quelle vitesse se déplace l'avion ?

Le décalage Doppler est $D = f_S - f_P = 1575{,}4200 - 1575{,}4000 = 0{,}0200$ MHz $= 20\,000$ Hz.

Par la formule reliant le décalage Doppler à la vitesse relative v entre P et S on a :

$$v \simeq \frac{cD}{f_S} = \frac{300\,000\,000 \cdot 20\,000}{1\,575\,420\,000} \simeq 3808{,}51 \text{ m/s}$$

On sait que le satellite s'éloigne de nous avec la vitesse v_S, donc notre vitesse v_P est

$$v_P = v_S - v = 4000{,}00 - 3808{,}51 = 191{,}49 \text{ m/s} \simeq 690 \text{ km/h}$$

Bien sûr, nous avons seulement calculer notre vitesse de déplacement le long de l'axe (PS). Pour calculer le vecteur vitesse il nous faudrait 3 satellites.

4.9. Boussole

Comment votre GPS peut-il savoir où est le Nord, alors qu'il ne contient pas de boussole ? Tout simplement en connaissant votre vecteur vitesse !

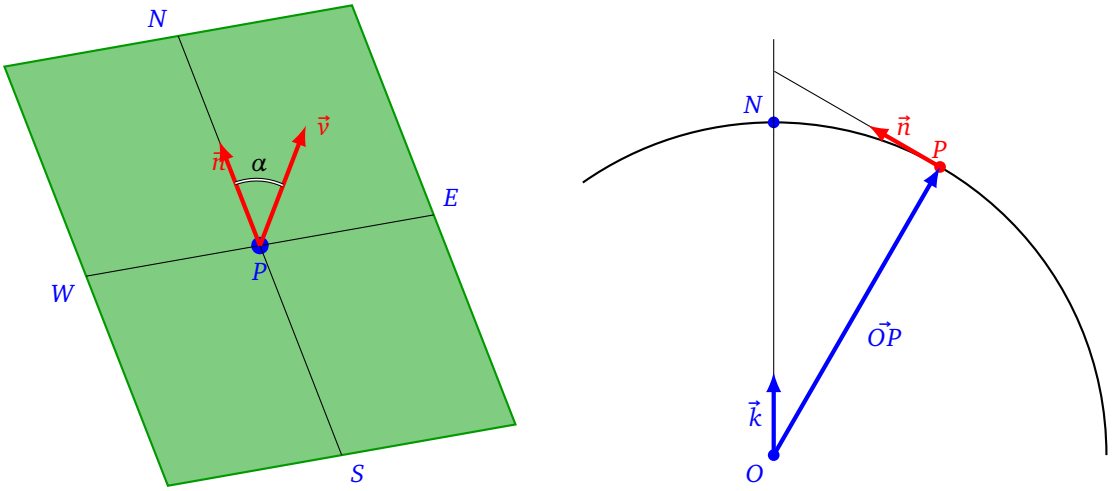
Pour bien comprendre les explications, il vaut mieux d'abord avoir lu la section suivante sur les différentes façons de se repérer dans l'espace. Le GPS nous fournit notre position P et, on vient de le voir, notre vitesse $\overrightarrow{v}$. Ce point et ce vecteur s'expriment dans un repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ dont l'origine est O le centre de la Terre ; $\overrightarrow{k}$ est porté par l'axe de rotation.

> **Proposition 4.**
> *Le vecteur*
> $$\overrightarrow{n} = R^2 \overrightarrow{k} - z_0 \overrightarrow{OP}$$
> *est un vecteur pointant vers le Nord depuis notre position $P = (x_0, y_0, z_0)$, où R est le rayon de la Terre. Le cap suivi, c'est-à-dire l'angle entre le Nord et notre direction, est l'angle entre $\overrightarrow{n}$ et notre vecteur vitesse $\overrightarrow{v}$.*

On retrouve alors le cap α (ou plus exactement $\cos\alpha$ et $\sin\alpha$) à l'aide du produit scalaire et du produit vectoriel :

$$\cos\alpha = \frac{\langle \overrightarrow{n} | \overrightarrow{v} \rangle}{\|\overrightarrow{n}\| \cdot \|\overrightarrow{v}\|} \qquad \text{et} \qquad \sin\alpha \cdot \frac{\overrightarrow{OP}}{\|\overrightarrow{OP}\|} = \frac{\overrightarrow{n} \wedge \overrightarrow{v}}{\|\overrightarrow{n}\| \cdot \|\overrightarrow{v}\|}$$

Comme on connaît le vecteur $\overrightarrow{v}$ (c'est notre direction) on en déduit la direction du Nord. Remarquez que si nous restons immobile, alors notre vitesse est nulle et il n'est pas possible d'en déduire la direction du Nord, contrairement à une boussole !



Démonstration. Au point P, situé à la surface de la Terre, on se place dans le plan tangent à la sphère. On suppose que l'on se déplace sans changer d'altitude, c'est-à-dire que le vecteur $\vec{v}$ est dans ce plan. Et c'est aussi dans ce plan que l'on cherche à s'orienter.
Un vecteur $\vec{n}$ porté par l'axe Nord-Sud vérifie les conditions suivantes :

1. Ce vecteur $\vec{n}$ est dans le plan tangent, c'est-à-dire orthogonal au vecteur $\vec{OP}$.
2. Ce vecteur est dans le plan défini par O, P et $\vec{k}$. C'est-à-dire le plan méridien correspondant à la longitude de P.

Mathématiquement cela donne :

1. $\langle \vec{n} | \vec{OP} \rangle = 0$
2. $n = \alpha \vec{k} + \beta \vec{OP}$ pour des $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

En substituant l'expression pour $\vec{n}$ dans l'égalité $\langle \vec{n} | \vec{OP} \rangle = 0$, on obtient

$$\begin{aligned}
& \langle \vec{n} | \vec{OP} \rangle = 0 \\
\iff \quad & \langle \alpha \vec{k} + \beta \vec{OP} | \vec{OP} \rangle = 0 \\
\iff \quad & \alpha \langle \vec{k} | \vec{OP} \rangle + \beta \langle \vec{OP} | \vec{OP} \rangle = 0 \\
\iff \quad & \alpha \langle (0,0,1) | (x_0, y_0, z_0) \rangle + \beta \| \vec{OP} \|^2 = 0 \quad \text{où } \vec{k} = (0,0,1) \text{ et } \vec{OP} = (x_0, y_0, z_0) \\
\iff \quad & \alpha z_0 + \beta R^2 = 0 \quad \text{où } R \text{ est le rayon de la Terre}
\end{aligned}$$

Une solution est donnée par $\alpha = R^2$ et $\beta = -z_0$, ce qui correspond au vecteur

$$\vec{n} = R^2 \vec{k} - z_0 \vec{OP}$$

Nous avons tout fait pour que ce vecteur soit dans le plan tangent et soit sur l'axe Nord-Sud. En plus il pointe vraiment vers le Nord (et pas le Sud) car $\langle \vec{n} | \vec{k} \rangle = R^2 > 0$. □

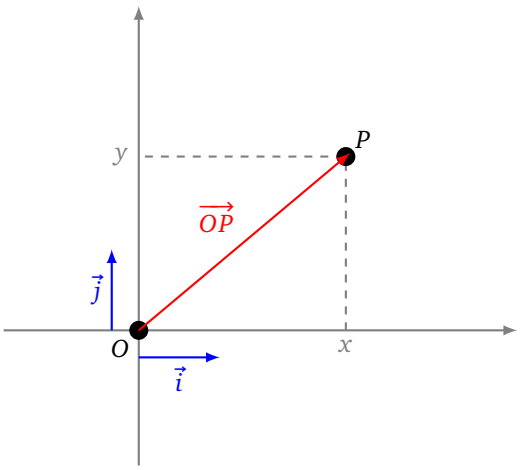
5. Systèmes de coordonnées

5.1. Coordonnées cartésiennes et polaires du plan

Dans le plan, soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère cartésien. Pour un point P quelconque du plan on peut décomposer le vecteur $\overrightarrow{OP}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$, c'est-à-dire qu'il existe des réels x et y tels que :

$$\overrightarrow{OP} = x\vec{i} + y\vec{j}.$$

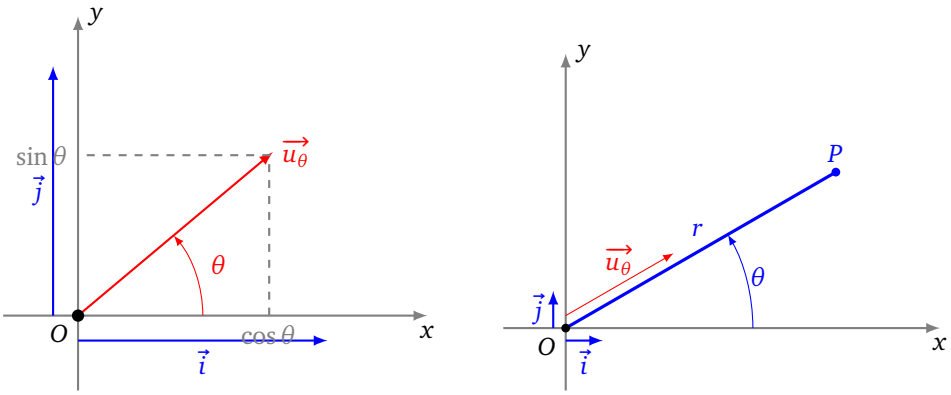
De plus de tels x et y sont uniques. Les ***coordonnées*** de P par rapport au repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est le couple $\binom{x}{y}$, noté aussi (x, y).



Passons aux coordonnées polaires. Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé direct Pour θ réel, on pose

$$\overrightarrow{u_\theta} = \cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j}.$$

Le point P étant un point du plan, on dit que $[r : \theta]$ est un couple de ***coordonnées polaires*** si $\overrightarrow{OP} = r\overrightarrow{u_\theta}$.



On passe des coordonnées polaires aux coordonnées cartésiennes par les formules suivantes :

$$\boxed{\begin{cases} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta \end{cases}}$$

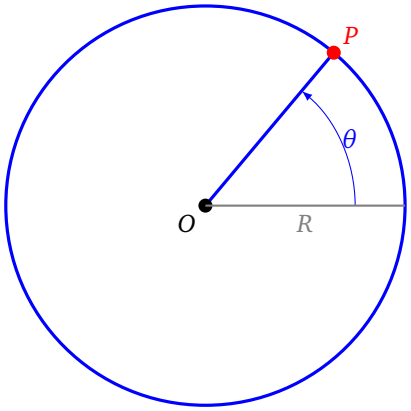
Ces formules s'obtiennent simplement en identifiant les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OP} = x\vec{i} + y\vec{j} = r\overrightarrow{u_\theta}$.
Dans l'autre sens, on retrouve les coordonnées polaires à partir des coordonnées cartésiennes par

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

qui représente la distance du point P à l'origine O, et si $r \neq 0$ alors on détermine θ (modulo 2π) par les identités :

$$\cos\theta = \frac{x}{r} \qquad \text{et} \qquad \sin\theta = \frac{y}{r}.$$

Modélisation de la Terre.
Si on souhaite modéliser la Terre alors on fixe le rayon r à $R = 6300\,\text{km}$. Sur ce modèle du plan, un point P à la surface de la Terre est alors déterminé par un seul paramètre, l'angle θ.



5.2. Coordonnées cartésiennes et sphériques de l'espace

On fait le même travail dans l'espace. Soit $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormé direct. Pour un point P de l'espace, on décompose le vecteur $\overrightarrow{OP}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$:

$$\overrightarrow{OP} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$$

et on appelle les ***coordonnées*** de P, par rapport au repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, le triplet $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, ou encore (x, y, z).
Les coordonnées sphériques sont définies par 3 paramètres $[r : \varphi : \lambda]$. On note

$$\overrightarrow{u_{\varphi,\lambda}} = \cos\varphi\cos\lambda\,\vec{i} + \cos\varphi\sin\lambda\,\vec{j} + \sin\varphi\,\vec{k}$$

le vecteur qui forme un angle λ avec l'axe $(O, \vec{i})$ et un angle φ avec le plan horizontal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Le point P de l'espace a pour ***coordonnées sphériques*** $[r : \varphi : \lambda]$ si $\overrightarrow{OP} = r\overrightarrow{u_{\varphi,\lambda}}$.

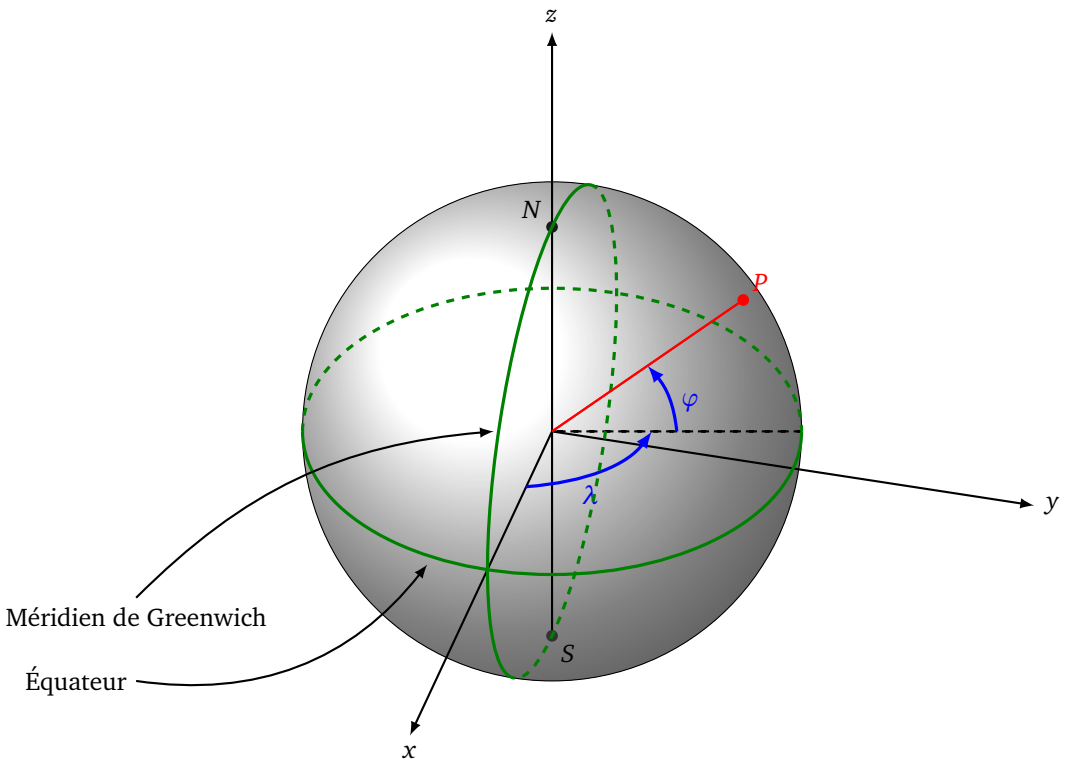
Le passage des coordonnées sphériques vers les coordonnées cartésiennes s'exprime par

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & r\cos\varphi\cos\lambda \\ y & = & r\cos\varphi\sin\lambda \\ z & = & r\sin\varphi \end{array} \right.$$

Dans l'autre sens on obtient $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Modélisation de la Terre. On modélise la Terre par une sphère (ou plutôt une boule) de rayon $R = 6300\,\text{km}$. Un point à la surface de la Terre (donc avec $r = R$) est déterminé par :

- l'angle φ, qui est la ***latitude***, c'est un angle entre $-90°$ et $90°$. Un point de l'équateur vérifie $\varphi = 0°$;
- l'angle λ, qui est la ***longitude***, c'est un angle entre $-180°$ et $180°$. Le méridien de Greenwich correspond à $\lambda = 0°$.



Exemple 9.
Le sommet de la montagne du Chimborazo en Équateur est le point sur Terre le plus loin du centre de la Terre. Ces coordonnées (x, y, z) en kilomètres sont :

$$x = 1238{,}0 \qquad y = -6261{,}0 \qquad z = -163{,}1$$

Calculer la distance r du sommet à l'origine ainsi que la latitude φ et la longitude λ.

Il s'agit d'inverser les relations : $\begin{cases} x &= r\cos\varphi\cos\lambda \\ y &= r\cos\varphi\sin\lambda \\ z &= r\sin\varphi \end{cases}$

On commence par trouver r :

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \simeq 6384{,}4\,\text{km}$$

Puis comme $\frac{z}{r} = \sin\varphi$, alors

$$\varphi = \arcsin\left(\frac{z}{r}\right) \simeq -1{,}464°$$

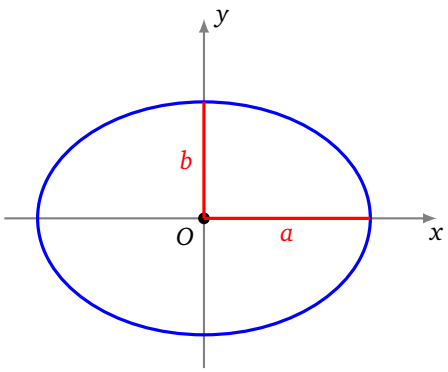
On en déduit $\cos\varphi$, et de l'égalité $\frac{y}{r} = \cos\varphi\sin\lambda$, on obtient :

$$\lambda = \arcsin\left(\frac{1}{\cos\varphi}\frac{y}{r}\right) \simeq -78{,}815°$$

Note : ce n'est pas le mont Everest qui est le point le plus éloigné du centre de la Terre, ceci à cause du phénomène d'aplatissement aux pôles que l'on verra juste après. Le sommet de l'Everest est à distance $r = 6382{,}3\,\text{km}$ du centre de la Terre.

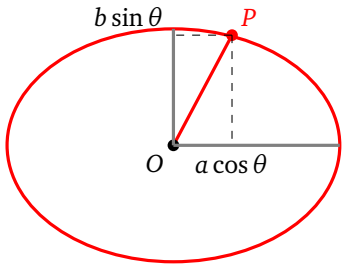
5.3. La Terre n'est pas ronde

La Terre n'est pas ronde ! Bien sûr il y a des montagnes et des vallées, mais ce sont des variations assez minimes. Par contre la Terre est aplatie aux pôles. Pour la modélisation dans le plan, on remplace le cercle de rayon R par une ellipse ayant un demi-grand axe a et un demi-petit axe b.



On adapte nos coordonnées polaires à cette ellipse. Un point sur l'ellipse est déterminé par un paramètre θ :

$$\begin{cases} x &= a\cos\theta \\ y &= b\sin\theta \end{cases}$$



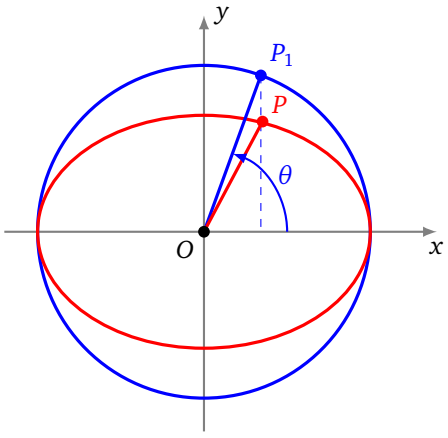
Bien sûr cette ellipse n'est pas très aplatie, les valeurs sont :

$$a = 6378{,}137\,\text{km} \qquad b = 6356{,}752\,\text{km}$$

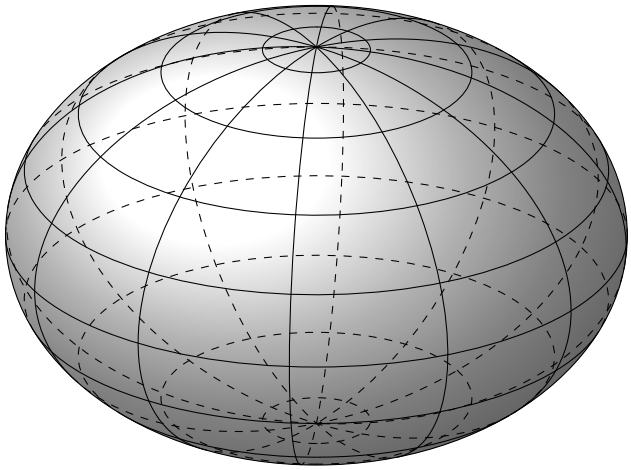
On défini l'*aplatissement* par

$$f = \frac{a-b}{a}$$

L'aplatissement est nul pour un cercle et vaut $f \simeq 0{,}003\,35$ pour la Terre. Par comparaison Saturne a un aplatissement de 0,1 ($a = 60\,268\,\text{km}$ $b = 54\,364\,\text{km}$) ; le Soleil lui a un aplatissement quasiment nul.



Attention θ n'est pas l'angle que l'on croit. Ce n'est pas l'angle entre l'horizontale et le vecteur $\overrightarrow{OP}$, mais l'angle entre l'horizontale et le vecteur $\overrightarrow{OP_1}$, où le point P_1 est le point du cercle principal, de même abscisse que P (et avec l'ordonnée de même signe que celle de P).
La Terre en 3 dimensions se modélise en un ellipsoïde obtenu par la rotation d'une ellipse autour de l'axe reliant le pôle Nord au pôle Sud. L'équateur est donc un cercle de rayon a alors que le méridien de Greenwich est une ellipse de demi-axes a et b.

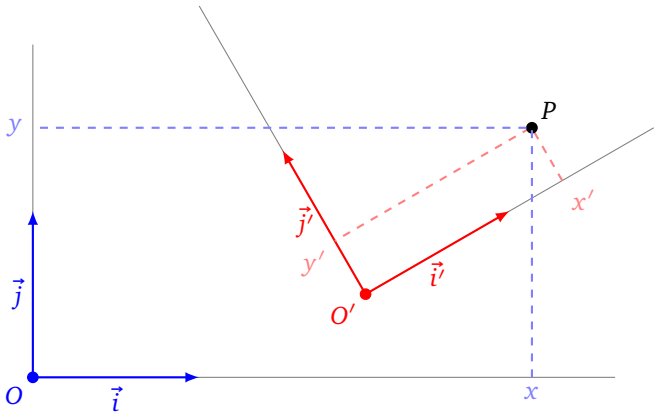


5.4. Changement de repère

Si l'on a deux repères cartésiens du plan ou de l'espace, alors on peut passer de l'un à l'autre par un changement de repère. Fixons deux repères $\mathscr{R} = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ et $\mathscr{R}' = (O', \overrightarrow{i'}, \overrightarrow{j'})$ du plan. Fixons aussi un point P du plan qui a pour coordonnées $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans le repère $\mathscr{R}$, et a pour coordonnées $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ dans le repère $\mathscr{R}'$.
Alors il existe une matrice inversible A telle que :

$$X = AX' + \overrightarrow{OO'}$$

où $\overrightarrow{OO'}$ est le vecteur joignant les deux origines des repères (dans cette formule $\overrightarrow{OO'}$ est considéré comme un vecteur colonne).
Sur la figure suivante les deux repères sont orthonormés directs.



Par exemple A peut être :

- la matrice d'une rotation d'angle θ (et de centre O) : $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ (c'est le cas si les deux repères sont orthonormés directs) ;
- la matrice d'une homothétie de rapport k (et de centre O) : $\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$;
- la matrice d'une symétrie par rapport à l'axe des abscisses $(O\overrightarrow{i})$: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$; ou à l'axe des ordonnées $(O\overrightarrow{j})$: $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;
- ou le produit de plusieurs de ces matrices ;
- ou plus généralement une matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ avec $ad - bc \neq 0$.

Pour un point P de l'espace dont les coordonnées sont $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ dans un repère $\mathscr{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et de coordonnées $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ dans le repère $\mathscr{R}' = (O', \vec{i'}, \vec{j'}, \vec{k'})$. Alors il existe une matrice inversible A telle que :

$$X = AX' + \overrightarrow{OO'}.$$

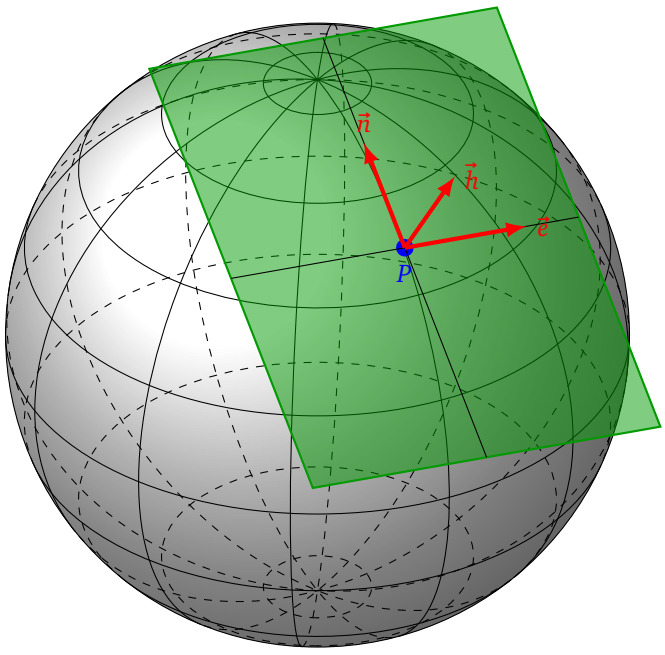
La matrice A peut être :

- la matrice d'une rotation d'angle λ d'axe $(O\vec{k})$: $\begin{pmatrix} \cos\lambda & -\sin\lambda & 0 \\ \sin\lambda & \sin\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;
- la matrice d'une rotation d'angle φ d'axe $(O\vec{j})$: $\begin{pmatrix} \cos\varphi & 0 & \sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\varphi & 0 & \sin\varphi \end{pmatrix}$;
- la matrice d'une homothétie de rapport k (et de centre O) : $\begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}$;
- la matrice d'une symétrie par rapport au plan $(O, \vec{i}, \vec{j})$: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$; ...
- ou le produit de plusieurs de ces matrices ;
- ou plus généralement une matrice $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ de déterminant non nul.

Attention, ces formules de changement de repères ne concernent que le passage entre deux repères cartésiens, et pas le passage des coordonnées cartésiennes aux coordonnées polaires.

5.5. Coordonnées locales

Pour quelqu'un situé à un point P de la surface de la Terre, il est utile de définir un repère dont l'origine est le point P. On choisit un repère $\mathscr{R}_{\text{loc}} = (P, \vec{h}, \vec{e}, \vec{n})$ (pour *haut*, *est*, *nord*). Le premier vecteur est perpendiculaire (et sortant) à la sphère. Les deux autres vecteurs sont tangents à la sphère, le second vecteur pointe vers l'Est, le troisième vers le Nord.



Soit le point P de coordonnées sphériques $[r : \varphi : \lambda]$. On passe du repère $\mathscr{R}_O = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ au repère $\mathscr{R}_{\text{loc}} = (P, \overrightarrow{h}, \overrightarrow{e}, \overrightarrow{n})$ par la séquence de transformations suivantes (dans cet ordre) :

- la rotation d'axe (Oy) et d'angle φ ;
- la rotation d'axe (Oz) et d'angle λ ;
- la translation de vecteur $\overrightarrow{OP}$.

Voir la figure du paragraphe 5.2.

Les matrices des rotations sont respectivement :

$$R_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & 0 & \sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{pmatrix} \qquad R_\lambda = \begin{pmatrix} \cos\lambda & -\sin\lambda & 0 \\ \sin\lambda & \cos\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et la translation a pour vecteur

$$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi\cos\lambda \\ r\cos\varphi\sin\lambda \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}$$

Pour un point M de l'espace, on note X_O les coordonnées de M dans le repère $\mathscr{R}_O$ et X_{loc} les coordonnées de ce même point M mais cette fois dans le repère $\mathscr{R}_{\text{loc}}$. Alors on passe de l'un à l'autre des systèmes de coordonnées par :

$$X_O = \big(R_\lambda R_\varphi\big) X_{\text{loc}} + \overrightarrow{OP}$$

où $R_\lambda R_\varphi$ est le produit des deux matrices.

Exemple 10.

Nous sommes au point P de latitude $\varphi = 45°$, de longitude $\lambda = 60°$ à la surface de la Terre (on prend $r = 6300\,\text{km}$). Vous apercevez un avion M situé à 20 km au Sud-Est et à 5 km d'altitude. Calculer les coordonnées (x_M, y_M, z_M) du point M.

1. Nous aurons besoin des coordonnées (x_P, y_P, z_P) du point P données par les formules : $\left\{ \begin{array}{rcl} x_P &=& r\cos\varphi\cos\lambda \simeq 2227 \\ y_P &=& r\cos\varphi\sin\lambda \simeq 3857 \\ z_P &=& r\sin\varphi \simeq 4454{,}8 \end{array} \right.$

   Ce qui donne bien sûr les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} x_P \\ y_P \\ z_P \end{pmatrix}$.

2. Nous devons trouver les coordonnées locales X_{loc} de M dans le repère $\mathscr{R}_{\text{loc}}$: 20 km au Sud-Est et 5 km de hauteur correspond à $5\overrightarrow{h} + \frac{\sqrt{2}}{2}20\overrightarrow{e} - \frac{\sqrt{2}}{2}20\overrightarrow{n}$, donc les coordonnées de M sont

   $$X_{\text{loc}} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10\sqrt{2} \\ -10\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

3. Les matrices de rotations sont ici :

   $$R_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & 0 & \sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \qquad R_\lambda = \begin{pmatrix} \cos\lambda & -\sin\lambda & 0 \\ \sin\lambda & \cos\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. On applique la formule de changement de base pour obtenir les coordonnées $X_O = \begin{pmatrix} x_M \\ y_M \\ z_M \end{pmatrix}$ de M dans $\mathscr{R}_O$:

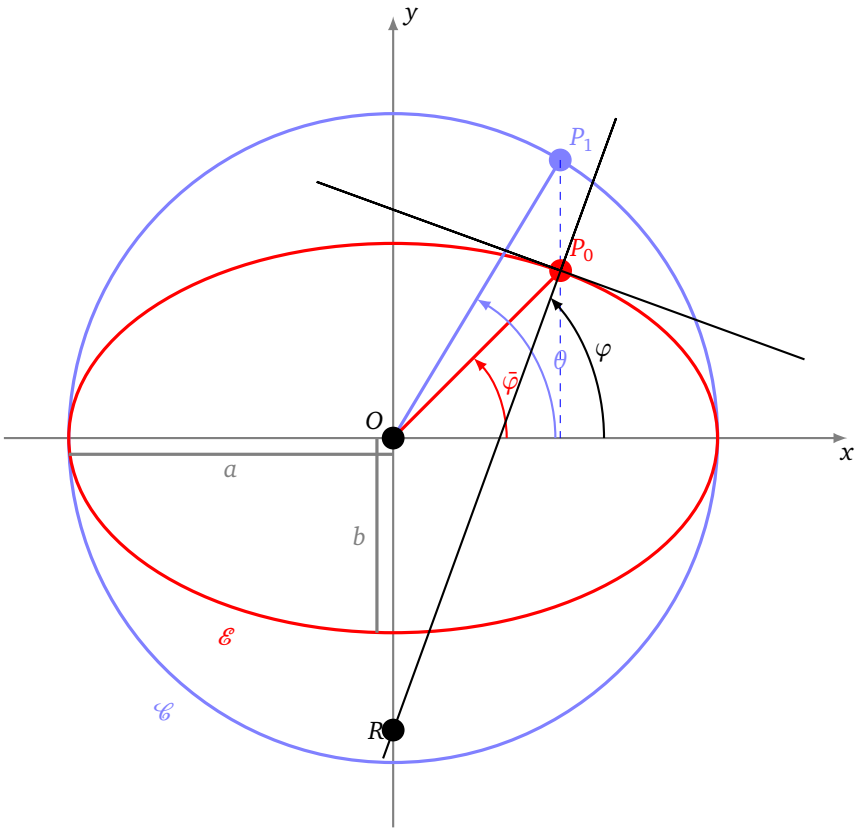
   $$X_O = \big(R_\lambda R_\varphi\big) X_{\text{loc}} + \overrightarrow{OP} \simeq \begin{pmatrix} 2211{,}4 \\ 3859{,}4 \\ 4441{,}2 \end{pmatrix}$$

5.6. Différentes latitudes

Comme la Terre n'est pas ronde, les choses se compliquent. Nous allons devoir définir trois latitudes ! On modélise la Terre par un ellipsoïde. Nous ferons les calculs dans le plan pour une ellipse, les formules pour l'ellipsoïde s'en déduiront par rotation. On modélise donc la surface de la Terre par une ellipse $\mathscr{E}$, d'équation :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Le demi-grand axe est de longueur a, le demi-petit axe est de longueur b. On trace aussi son cercle principal $\mathscr{C}$ de rayon a. Soit $P_0 = (x_0, y_0)$ un point de l'ellipse $\mathscr{E}$. Soit $P_1 = (x_1, y_1)$ le point de même abscisse que P_0 mais situé sur le cercle $\mathscr{C}$.



- La ***latitude géocentrique*** $\bar{\varphi}$ est l'angle entre l'axe des abscisses et la droite (OP_0).
- La ***latitude géographique*** φ est l'angle entre l'axe des abscisses et la verticale en P_0. La verticale est la droite verticale du lieu : c'est la droite orthogonale à l'ellipse en P_0 (c'est-à-dire perpendiculaire à la tangente en P_0 à l'ellipse). La verticale en P_0 ne passe (en général) pas par l'origine O.
- La ***latitude réduite*** θ est l'angle entre l'axe des abscisses et la droite (OP_1).

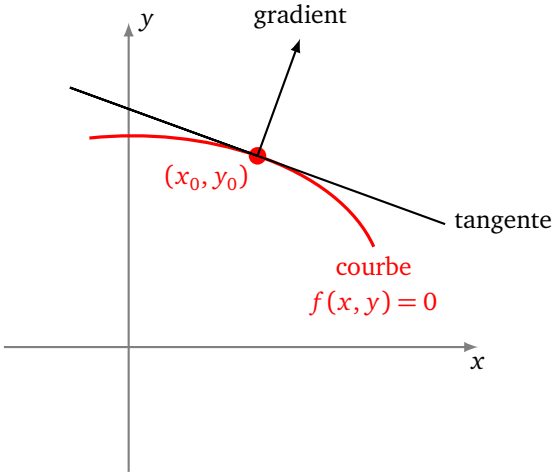
Ce que l'observateur mesure en P_0 c'est la latitude géographique. C'est donc φ l'angle le plus important avec lequel on souhaite se repérer. Pour l'instant nous allons trouver la relation entre ces trois angles.

Proposition 5.

$$\tan\bar{\varphi} = \frac{y_0}{x_0} \qquad \tan\theta = \frac{a}{b}\tan\bar{\varphi} \qquad \tan\varphi = \frac{a^2}{b^2}\tan\bar{\varphi}$$

Démonstration. 1. Tout d'abord l'ellipse est l'image du cercle par la transformation affine $(x, y) \mapsto (x, \frac{b}{a}y)$. Ainsi $(x_0, y_0) = (x_1, \frac{b}{a}y_1)$. En particulier $\frac{y_1}{x_1} = \frac{a}{b}\frac{y_0}{x_0}$.

2. Ensuite si on note r la distance OP_0 alors $x_0 = r\cos\bar{\varphi}$ et $y_0 = r\sin\bar{\varphi}$ et ainsi :
$$\tan\bar{\varphi} = \frac{\sin\bar{\varphi}}{\cos\bar{\varphi}} = \frac{y_0}{x_0}.$$
3. Comme $x_1 = a\cos\theta$, $y_1 = a\sin\theta$ alors
$$\tan\theta = \frac{y_1}{x_1} = \frac{a}{b}\frac{y_0}{x_0} = \frac{a}{b}\tan\bar{\varphi}.$$
4. Obtenir une relation avec la latitude géographique φ demande de connaître la verticale du lieu. Par définition de l'angle φ, un vecteur (unitaire) vertical en P_0 est
$$\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\end{pmatrix}.$$
Nous avons besoin d'une autre façon de calculer la direction verticale. Pour cela on utilise le fait que si une courbe a pour équation $f(x,y) = 0$ et passe par le point (x_0, y_0) alors une équation de la tangente au point (x_0, y_0) est :
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) = 0.$$



Autrement dit le gradient
$$\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\end{pmatrix}$$
est orthogonal à la tangente à la courbe en ce point.

On applique ceci à l'ellipse définie par l'équation $f(x,y) = 0$ où $f(x,y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1$. Comme
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{2x_0}{a^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = \frac{2y_0}{b^2}.$$
Alors le vecteur gradient est
$$\overrightarrow{v} = \begin{pmatrix}\frac{2x_0}{a^2}\\ \frac{2y_0}{b^2}\end{pmatrix}.$$
Ainsi le vecteur $\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\end{pmatrix}$ et le vecteur gradient $\overrightarrow{v}$ sont deux vecteurs colinéaires, ce qui implique que
$$\begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\end{pmatrix} = k\begin{pmatrix}\frac{2x_0}{a^2}\\ \frac{2y_0}{b^2}\end{pmatrix}$$
pour un certain $k \in \mathbb{R}$. En particulier
$$\tan\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \frac{\frac{2y_0}{b^2}}{\frac{2x_0}{a^2}} = \frac{a^2}{b^2}\frac{y_0}{x_0} = \frac{a^2}{b^2}\tan\bar{\varphi}.$$

□

5.7. Coordonnées géographiques

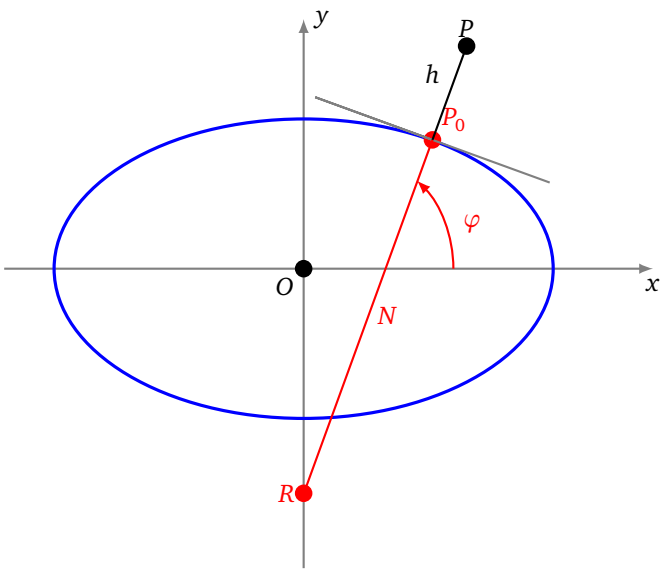
Théorème 3.
Pour un point $P=(x,y,z)$ ayant une latitude géographique φ et une altitude h alors

$$\begin{cases} x &= (N+h)\cos\varphi \\ y &= \left(\frac{b^2}{a^2}N+h\right)\sin\varphi \end{cases}$$

où

$$N=\frac{a}{\sqrt{1-\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)\sin^2\varphi}}.$$

Si on note P_0 le point de (OP) situé à la surface de la Terre, alors la valeur N (qui dépend de la latitude φ) est la distance P_0, c'est-à-dire la distance entre P_0 et l'axe (Oy), mesurée le long de la verticale en P_0.



Si e est l'excentricité de l'ellipse alors $e^2=1-\frac{b^2}{a^2}$, donc $N=\frac{a}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}$. Cette valeur N est aussi le rayon de courbure de l'ellipse au point P_0. En effet l'ellipse étant symétrique par rapport à l'axe (Oy), le centre de courbure doit appartenir à l'axe (Oy). Ainsi le rayon de courbure est bien cette longueur N.
Les formules en dimension 3 pour un ellipsoïde sont similaires, elles découlent du théorème en prenant une section de la Terre passant les pôles et le point P :

Corollaire 1.
Pour un point $P=(x,y,z)$ de latitude géographique φ, de longitude λ et d'altitude h alors

$$\begin{cases} x &= (N+h)\cos\varphi\cos\lambda \\ y &= (N+h)\cos\varphi\sin\lambda \\ z &= \left(\frac{b^2}{a^2}N+h\right)\sin\varphi \end{cases}$$

où $N=\frac{a}{\sqrt{1-\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)\sin^2\varphi}}$.

Exemple 11.
Les satellites GPS sont lancés depuis la base de Cap Canaveral en Floride. Sa latitude est $\varphi=28{,}475\,630°$, sa longitude $\lambda=-80{,}565\,834°$ et se situe au niveau de la mer. Calculer les coordonnées (x,y,z) de la base, tout d'abord pour le modèle sphérique, en prenant $R=6371{,}0\,\text{km}$ comme rayon moyen de la Terre. Faire le même calcul pour le modèle ellipsoïdal avec $a=6378{,}137\,\text{km}$, $b=6356{,}752\,\text{km}$.

1. Il s'agit d'appliquer les formules sphériques :
$$\begin{cases} x_1 &= R\cos\varphi\cos\lambda \simeq 918{,}0 \\ y_1 &= R\cos\varphi\sin\lambda \simeq -5524{,}5 \\ z_1 &= R\sin\varphi \simeq 3037{,}6 \end{cases}$$
2. Pour le modèle ellipsoïdal on commence par calculer le rayon de courbure N (qui dépend de la latitude φ) :
$$N = \frac{a}{\sqrt{1-\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)\sin^2\varphi}} \simeq 6383{,}0$$
Puis on applique les formules ellipsoïdales (avec ici $h = 0$) :
$$\begin{cases} x_2 &= N\cos\varphi\cos\lambda \simeq 919{,}7 \\ y_2 &= N\cos\varphi\sin\lambda \simeq -5534{,}9 \\ z_2 &= \frac{b^2}{a^2}N\sin\varphi \simeq 3022{,}9 \end{cases}$$

On constate des écarts de plusieurs kilomètres entre les deux modèles.

Preuve du théorème.
Coordonnées de P_0.
Notons N la longueur P_0R. Alors dans la triangle rectangle d'hypoténuse P_0R on a
$$x_0 = N\cos\varphi.$$
D'après la proposition 5 on a
$$y_0 = x_0\tan\bar{\varphi} = x_0\frac{b^2}{a^2}\tan\varphi = N\cos\varphi\frac{b^2}{a^2}\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = N\frac{b^2}{a^2}\sin\varphi.$$
Calcul de N.
Le point $P_0 = (x_0, y_0)$ est sur l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1$. En substituant les valeur de x_0 et y_0 obtenues juste au-dessus on obtient
$$\begin{aligned} & \frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2} = 1 \\ \Longrightarrow\quad & \frac{N^2\cos^2\varphi}{a^2}+\frac{b^4}{a^4}\frac{N^2\sin^2\varphi}{b^2} = 1 \\ \Longrightarrow\quad & N^2\left((1-\sin^2\varphi)+\frac{b^2}{a^2}\sin^2\varphi\right) = a^2 \\ \Longrightarrow\quad & N = \frac{a}{\sqrt{1-\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)\sin^2\varphi}} \end{aligned}$$
Coordonnées de P.
Rappelons que $\overrightarrow{u}$ est un vecteur unitaire dirigé suivant la verticale du lieu :
$$\overrightarrow{u} = \begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\end{pmatrix}.$$
De l'identité vectorielle
$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + h\overrightarrow{u}$$
on déduit
$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix} + h\begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\end{pmatrix}.$$
Ce qui donne
$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}(N+h)\cos\varphi\\ \left(\frac{b^2}{a^2}N+h\right)\sin\varphi\end{pmatrix}$$
□

6. Position approchée

6.1. Les erreurs

Einstein disait : « En théorie, la théorie et la pratique sont identiques. En pratique, elles sont différentes ! » En théorie, 4 satellites permettent de déterminer la position exacte (parmi deux possibles). En pratique, il est illusoire d'espérer une précision absolue, car il existe une multitude de sources possibles d'erreurs, les principales sont :

- des perturbations du signal lorsqu'il traverse l'atmosphère (l'ionosphère et la troposphère) ;
- des erreurs de mesures des instruments, principalement des erreurs de mesure du temps ;
- des erreurs dues aux effets de la physique relativiste (effets qu'il est possible de modéliser) ;
- des erreurs sur la position des satellites ;
- des erreurs dues à une mauvaise configuration des satellites.

Il existe d'autres sources d'erreurs :

- des erreurs dans les calculs numériques ;
- une dégradation volontaire possible du signal, car le GPS reste avant tout un service de l'armée des États-Unis.

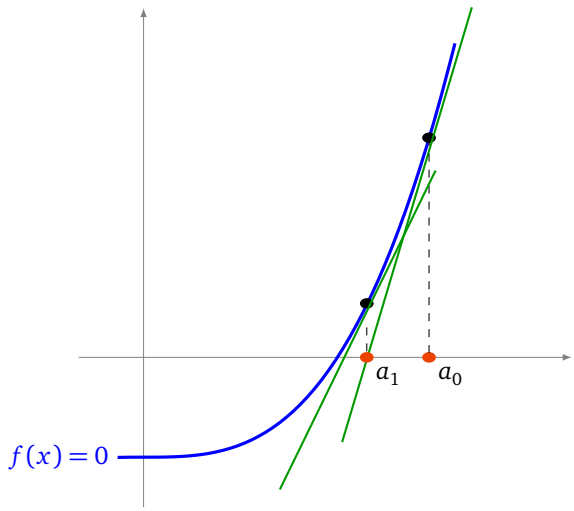
Une première conséquence de toutes ces erreurs, c'est qu'il est illusoire de chercher une solution exacte pour notre position. Aussi dans la pratique, on se contente de chercher une solution approchée, et d'appliquer des méthodes d'approximation qui sont beaucoup plus rapides : nous étudierons la méthode de linéarisation. La deuxième conséquence est qu'il faut pallier à toutes ces erreurs pour obtenir une position assez précise. La façon la plus efficace est d'utiliser plus que les 4 satellites indispensables. Nous verrons comment déterminer une position optimale à partir d'un nombre quelconque de satellites.

6.2. Calcul par linéarisation (dimension 1)

On commence par un modèle simple, en une dimension. L'équation à résoudre en dimension 1, avec un seul satellite est

$$(x - x_1)^2 = r_1^2.$$

On note $f(x) = (x - x_1)^2 - r_1^2$. Il s'agit donc de trouver x tel que $f(x) = 0$ (on oublie qu'ici on pourrait trouver une solution exacte). Une méthode classique et efficace est la méthode de Newton. Expliquons-la d'abord géométriquement, on part d'une valeur a_0 et on construit une suite (a_n) qui va tendre (très vite) vers un zéro de f. On construit d'abord la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a_0, cette tangente recoupe l'axe des abscisse en une abscisse que l'on note a_1. On recommence le processus : on construit la tangente au point d'abscisse a_1... On remplace localement la courbe par une droite, d'où le nom du processus : la linéarisation.



Passons à la partie calculs. Pour un point a, la tangente en a admet pour équation :

$$y = f(a) + f'(a)(x-a).$$

Trouver l'intersection avec l'axe des abscisses d'équation $(y=0)$ revient à résoudre l'équation $0 = f(a) + f'(a)(x-a)$. Ce qui conduit à $x = a - \frac{f(a)}{f'(a)}$. Ainsi on définit par récurrence, la suite

$$a_{n+1} = a_n - \frac{f(a_n)}{f'(a_n)} \tag{6}$$

Comme $f'(x) = 2(x-x_1)$, on trouve explicitement :

$$a_{n+1} = a_n - \frac{1}{2}\left((a_n - x_1) - \frac{r_1^2}{a_n - x_1}\right).$$

Une étude de fonction et de suite récurrente prouve le résultat suivant pour notre fonction $f(x) = (x-x_1)^2 - r_1^2$.

Proposition 6.
Fixons $a_0 \in \mathbb{R}$. La suite définie par la relation de récurrence

$$\boxed{a_{n+1} = a_n - \frac{f(a_n)}{f'(a_n)}}$$

converge vers une solution de $f(x) = 0$.

Une remarque importante : une équation de la tangente est $(g(x)=0)$ où $g(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$ ce qui correspond au développement limité à l'ordre 1 de f. On remplace donc la recherche d'un zéro de f par celle, beaucoup plus facile, d'un zéro de g. Le zéro de g obtenu ne répond qu'approximativement au problème, mais on peut recommencer le processus jusqu'à obtenir la précision souhaitée.

6.3. Calcul par linéarisation (dimension 2)

En dimension 2, chacun des deux satellites correspond à une fonction :

$$f_1(x,y) = (x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 - r_1^2 \qquad f_2(x,y) = (x-x_2)^2 + (y-y_2)^2 - r_2^2$$

qui donne deux équations $(f_1(x,y)=0)$ et $(f_2(x,y)=0)$. Il s'agit donc de linéariser la fonction f_1 (et la fonction f_2) en prenant leur développement limité à l'ordre 1 en un point (a,b) :

$$g_1(x,y) = f_1(a,b) + (x-a)\frac{\partial f_1}{\partial x}(a,b) + (y-b)\frac{\partial f_1}{\partial y}(a,b)$$

$$g_2(x,y) = f_2(a,b) + (x-a)\frac{\partial f_2}{\partial x}(a,b) + (y-b)\frac{\partial f_2}{\partial y}(a,b)$$

Au lieu de chercher l'intersection $\big(f_1(x,y)=0\big)\cap\big(f_2(x,y)=0\big)$ on cherche l'intersection $\big(g_1(x,y)=0\big)\cap\big(g_2(x,y)=0\big)$, ce qui en notation vectorielle conduit à :

$$\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}f_1(a,b)\\f_2(a,b)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x}(a,b) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(a,b)\\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(a,b) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(a,b)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x-a\\y-b\end{pmatrix}$$

Notons $J(a,b)$ la matrice jacobienne :

$$J(a,b)=\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x}(a,b) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(a,b)\\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(a,b) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(a,b)\end{pmatrix}$$

alors, on doit résoudre

$$J(a,b)\begin{pmatrix}x-a\\y-b\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}f_1(a,b)\\f_2(a,b)\end{pmatrix}$$

Si $J(a,b)$ est inversible alors on trouve

$$\begin{pmatrix}x-a\\y-b\end{pmatrix}=-J(a,b)^{-1}\begin{pmatrix}f_1(a,b)\\f_2(a,b)\end{pmatrix}$$

donc

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}-J(a,b)^{-1}\begin{pmatrix}f_1(a,b)\\f_2(a,b)\end{pmatrix}$$

Proposition 7.
Partant d'un point quelconque $\binom{a_0}{b_0}$ *on définit par récurrence la suite de points*

$$\boxed{\begin{pmatrix}a_{n+1}\\b_{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_n\\b_n\end{pmatrix}-J(a_n,b_n)^{-1}\begin{pmatrix}f_1(a_n,b_n)\\f_2(a_n,b_n)\end{pmatrix}}$$

Cette suite converge vers une solution (x,y) *vérifiant* $f_1(x,y)=0$ *et* $f_2(x,y)=0$.

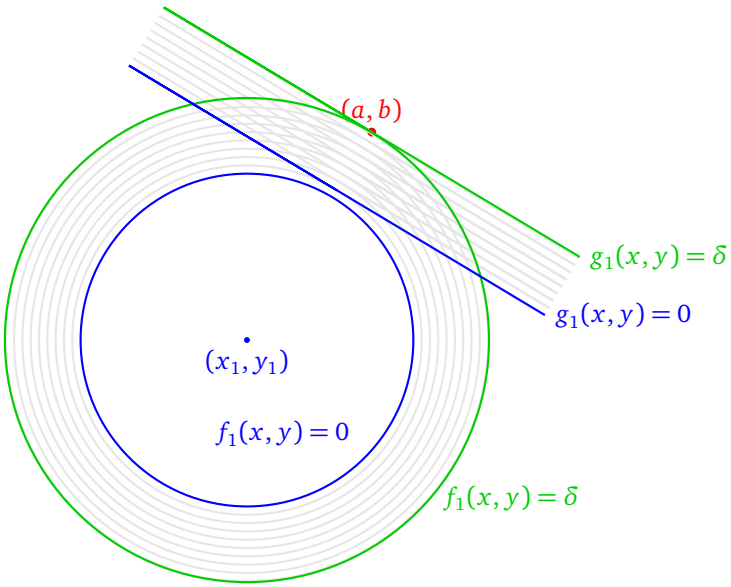
Nous admettons cette proposition.
La formule de récurrence

$$\begin{pmatrix}a_{n+1}\\b_{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_n\\b_n\end{pmatrix}-J(a_n,b_n)^{-1}\begin{pmatrix}f_1(a_n,b_n)\\f_2(a_n,b_n)\end{pmatrix}\tag{7}$$

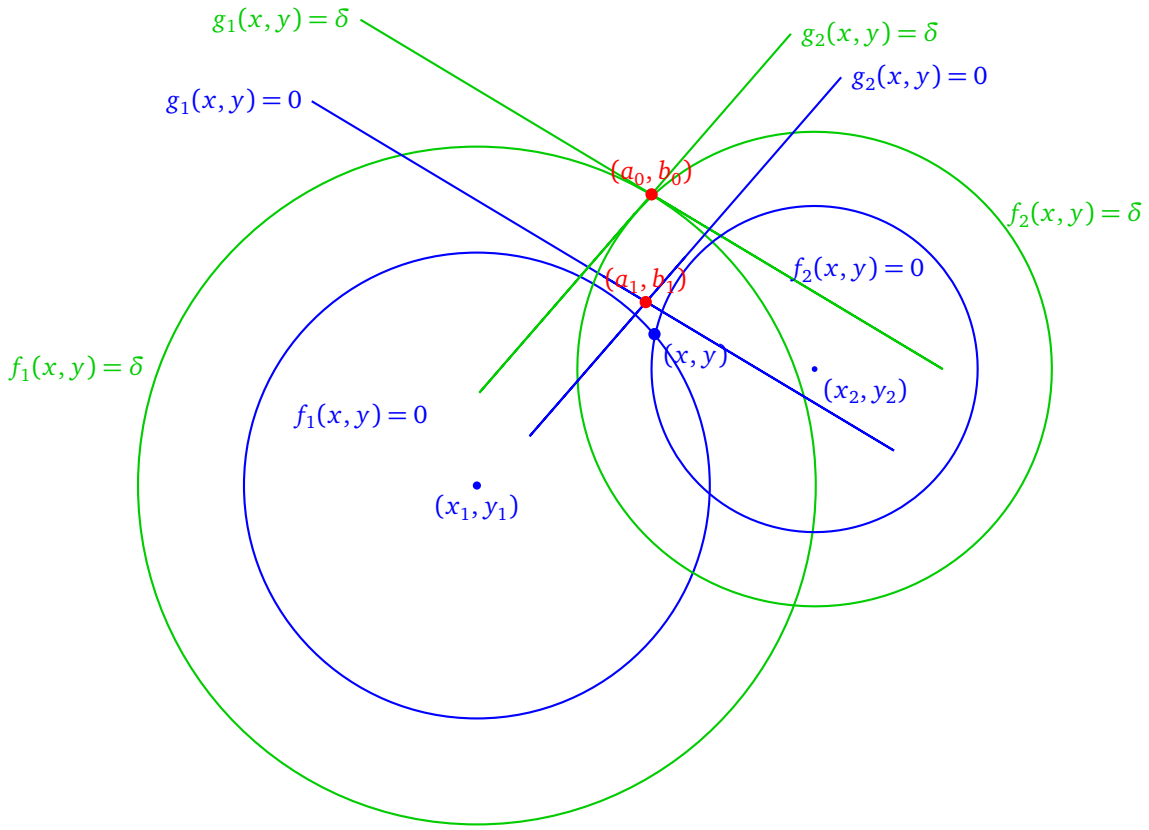
est comparable à la formule (6) si l'on considère que $J(a,b)$ joue le rôle de la dérivée. Connaissant $f_1(x,y)=(x-x_1)^2+(y-y_1)^2-r_1^2$ et $f_2(x,y)=(x-x_2)^2+(y-y_2)^2-r_2^2$, on calcule

$$J(a,b)=\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x}(a,b) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(a,b)\\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(a,b) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(a,b)\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}a-x_1 & b-y_1\\ a-x_2 & b-y_2\end{pmatrix}$$

La matrice $J(a,b)$ est donc inversible si les vecteurs $(a-x_1,b-y_1)$ et $(a-x_2,b-y_2)$ ne sont pas colinéaires. Autrement dit, si les points (a,b), (x_1,y_1), (x_2,y_2) ne sont pas alignés.
Voici une interprétation géométrique de la linéarisation : on cherche une solution qui doit appartenir au cercle d'équation $(f_1(x,y)=0)$. Pour cela on part d'un point (a,b) hors du cercle, on note $\delta=f_1(a,b)\neq 0$ qui mesure l'écart entre le point (a,b) et le cercle. Par définition de g_1 on a aussi $g_1(a,b)=\delta$. Les courbes d'équation $g_1(x,y)=\text{cst}$ sont des droites perpendiculaires à la droite passant par (x_1,y_1) et (a,b).
Nous ce qui nous intéresse ce sont les points du cercle $(f_1(x,y)=0)$, la méthode de linéarisation consiste à remplacer ce cercle par les points de la droite $(g_1(x,y)=0)$. Cette droite est une droite proche (mais pas égale) à la tangente au cercle.



Dans la situation de deux satellites, on souhaite trouver une des intersections de deux cercles $(f_1(x,y)=0)$ et $(f_2(x,y)=0)$. Partant d'un (a_0,b_0) quelconque, on calcule les fonctions g_1 et g_2 associées à ce point (a_0,b_0). On trace les deux droites d'équation $(g_1(x,y)=0)$ et $(g_2(x,y)=0)$. Elles se coupent en un point (a_1,b_1) assez proche de l'intersection des cercles. On recommence en partant du point (a_1,b_1) pour lequel on calcule de nouvelles fonctions g_1, g_2, qui fournissent deux nouvelles droites, dont l'intersection est encore plus proche de notre solution.



Exemple 12.
On reçoit le signal d'un satellite avec $(x_1,y_1)=(0,0)$, $r_1=4$ et d'un second avec $(x_2,y_2)=(5,2)$, $r_2=3$. La dernière position connue est $(a_0,b_0)=(1,6)$. Où sommes nous ?
Nous allons chercher notre position approchée par la méthode de linéarisation. On pose

$$f_1(x,y)=x^2+y^2-4^2 \qquad f_2(x,y)=(x-5)^2+(y-2)^2-3^2$$

Donc

$$J(a,b) = 2\begin{pmatrix} a & b \\ a-5 & b-2 \end{pmatrix}$$

- **Étape 0.** $\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}$
- **Étape 1.** Nous avons :

$$J(a_0,b_0) = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} f_1(a_0,b_0) \\ f_2(a_0,b_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 \\ 23 \end{pmatrix}$$

Donc

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} - J(a_0,b_0)^{-1}\begin{pmatrix} f_1(a_0,b_0) \\ f_2(a_0,b_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 12 \\ -8 & 8 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 21 \\ 23 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 55/28 \\ 229/56 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 1{,}9643 \\ 4{,}0893 \end{pmatrix}$$

- **Étape 2.**

$$J(a_1,b_1) = \begin{pmatrix} 55/14 & 229/28 \\ -85/14 & 117/28 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} f_1(a_1,b_1) \\ f_2(a_1,b_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14365/3136 \\ 14365/3136 \end{pmatrix}$$

Donc

$$\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} - J(a_1,b_1)^{-1}\begin{pmatrix} f_1(a_1,b_1) \\ f_2(a_1,b_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23223/10360 \\ 14073/4144 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 2{,}2416 \\ 3{,}3960 \end{pmatrix}$$

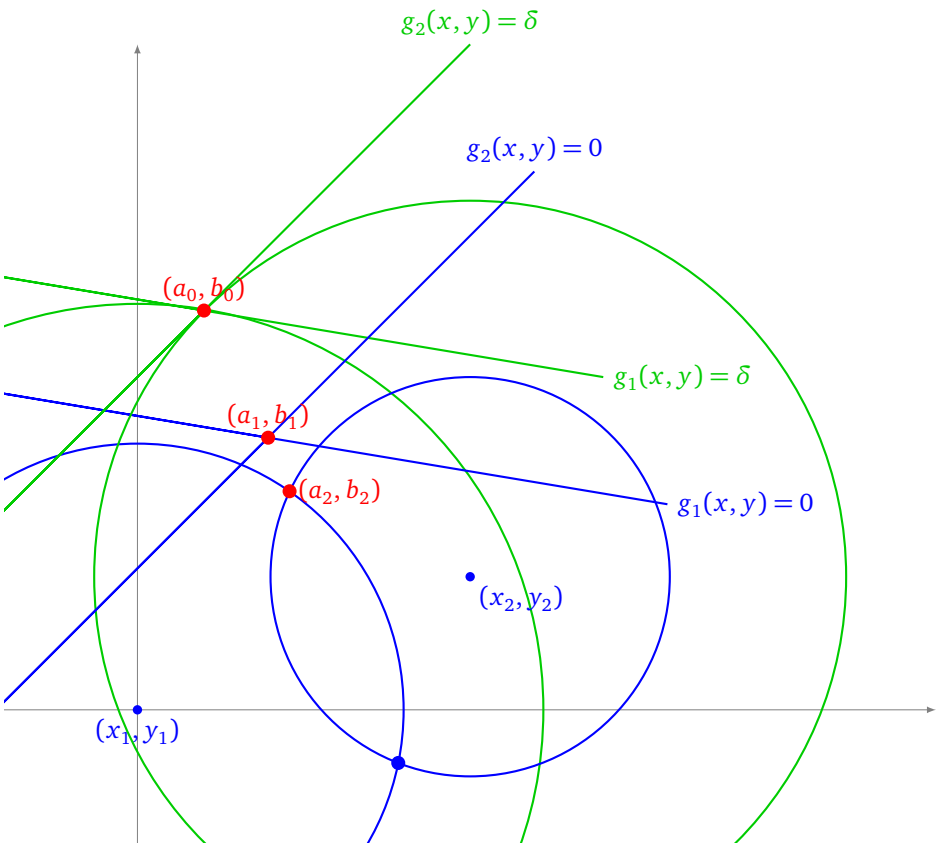
- **Étape 2.** Après calculs

$$\begin{pmatrix} a_3 \\ b_3 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 2{,}2862 \\ 3{,}2845 \end{pmatrix}$$

Les solutions exactes s'obtiennent par calculs algébriques :

$$\begin{pmatrix} \frac{90}{29} - \frac{4}{29}\sqrt{35} \\ \frac{36}{29} + \frac{10}{29}\sqrt{35} \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 2{,}2874 \\ 3{,}2814 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \frac{90}{29} + \frac{4}{29}\sqrt{35} \\ \frac{36}{29} - \frac{10}{29}\sqrt{35} \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 3{,}9194 \\ -0{,}7986 \end{pmatrix}$$

À la fin de l'étape 2, sur le dessin, on ne distingue plus la solution approchée (a_2, b_2) de la solution exacte. Sur le dessin, seule la construction de (a_0, b_0) vers (a_1, b_1) est dessinée.

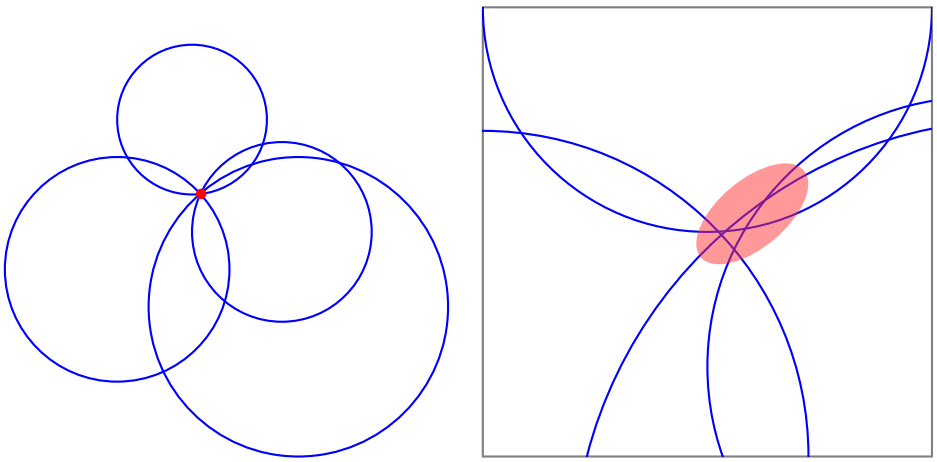


6.4. Passage à un système surdimensionné

Quelque soit la méthode de résolution, par linéarisation ou par calcul exact, on est amené à résoudre un (ou plusieurs) système linéaire de type $AX = B$. Jusqu'ici nous avons toujours supposé qu'il y a avait autant d'inconnues (dans le cas le plus général (x, y, z, t)) que d'équations (une équation par satellite). Ce qui fait que la matrice A est une matrice carrée, et le plus souvent inversible, ce qui permet de résoudre le système linéaire en : $X = A^{-1}B$.

Comment profiter de la réception de plus de signaux ? Parmi les 30 satellites du système GPS, tous ne sont pas « visibles » par l'utilisateur. Cependant il y a bien souvent entre 7 et 10 signaux reçus. Nous allons voir comment en profiter.

Il faut tout d'abord bien comprendre qu'en théorie rajouter plus d'équations ne change rien : les solutions restent les mêmes. En pratique c'est différent, du fait des erreurs inévitables il n'y a aucun point qui satisfasse toutes les équations ; cependant on souhaite trouver un point qui répond au mieux au problème. En théorie (figure de gauche) un point est solution de toutes les équations, en pratique même si aucun point n'est solution, une zone de points est à privilégier (zoom de la figure de droite).



Dans le cadre plus général nous avions $p = 4$ inconnues (x, y, z, t) (mais souvent pour les exemples on se contentait de (x, y)). On note X le vecteur colonne des inconnues, c'est un vecteur de taille p. Chaque satellite fournit une équation linéaire, donc avec n satellites on aboutit à un système linéaire

$$AX = B$$

où $A \in M_{n,p}$ est une matrice avec n lignes et p colonnes, le second membre B est un vecteur colonne de taille n.

Dans le cas qui nous intéresse ici, $n \geqslant p$, $A \in M_{n,p}$ n'est plus une matrice carrée, parler de son inverse n'a plus de sens.

6.5. Méthode des moindres carrés

Soit $A \in M_{n,p}$ une matrice, X un vecteur inconnu de taille p et B un vecteur de taille n. Comme il n'y a en général pas de solution X, au système $AX = B$, il faut se mettre d'accord sur le X qui convient, comme il faut que $AX - B$ soit le plus proche du vecteur nul, on définit :

Définition 2.
Une ***solution des moindres carrés*** X est un vecteur tel que $\|AX - B\|$ soit le plus petit possible.

Si on note le vecteur $C = AX - B = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$ alors

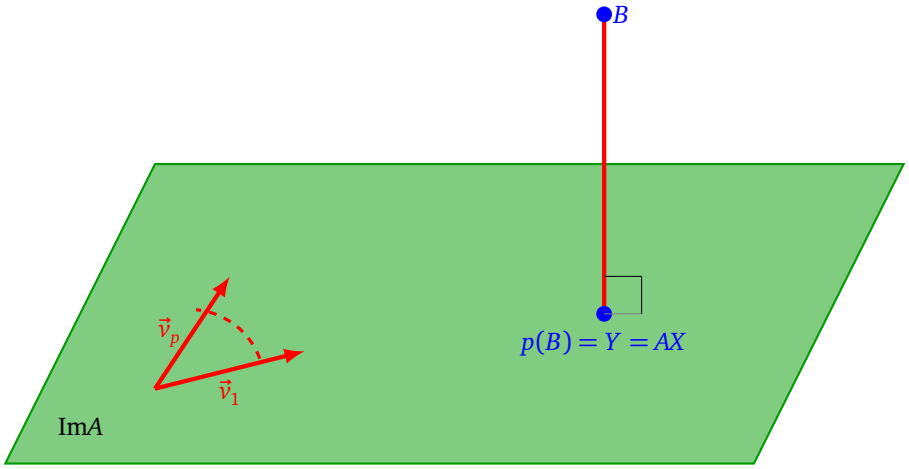
$$\|C\|^2 = \langle C \mid C \rangle = C^T \cdot C = c_1^2 + c_2^2 + \cdots + c_n^2$$

Il s'agit donc de minimiser cette somme des carrés, d'où le nom « moindres carrés ».

Proposition 8.

1. *Une solution au problème des moindres carrés $AX = B$ existe et est unique.*
2. *La solution des moindres carrés est donnée par la formule*
$$X = (A^T A)^{-1} A^T B$$
3. *Géométriquement, si Y est le projeté orthogonal de B sur le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs colonnes de la matrice A, alors X est la solution du système $AX = Y$.*

Remarque : nous admettons (et nous supposons) que la matrice $A^T A$ est inversible lorsque A est de rang maximal (donc de rang p, car pour nous $n \geqslant p$). Expliquons la caractérisation géométrique.



Pour une matrice $A \in M_{n,p}$, voici des définitions équivalentes de l'*image* de A : Notons $v_1, v_2, \ldots, v_p$ les p colonnes de la matrice A.

- $\mathrm{Im}A = \mathrm{Vect}(v_1, v_2, \ldots, v_p)$ est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ engendré par les p vecteurs colonnes $v_1, v_2, \ldots, v_p$ de la matrice A. Autrement dit :

$$\mathrm{Im}A = \mathrm{Vect}(v_1, v_2, \ldots, v_p) = \left\{x_1 v_1 + \cdots + x_p v_p \in \mathbb{R}^n \mid x_1, \ldots, x_p \in \mathbb{R}\right\}$$

- ImA est l'ensemble des vecteurs images par A :

$$\mathrm{Im}A = \left\{AX \mid X \in \mathbb{R}^p\right\}$$

Dire que le problème $AX = B$ n'a pas de solution exacte, c'est dire que le vecteur B n'appartient pas à ImA. Soit $Y = p(B)$ le projeté orthogonal de B sur ImA.

- D'une part $Y \in \mathrm{Im}A$ et Y minimise la distance entre B et les points de ImA, autrement dit $\|Y - B\| \leqslant \|Y' - B\|$ quelque soit $Y' \in \mathrm{Im}A$. C'est une des caractérisations géométriques de la projection orthogonale.
- D'autre part comme $Y \in \mathrm{Im}A$ alors il existe $X \in \mathbb{R}^p$ tel que $AX = Y$.

Exemple 13.
On reçoit 4 signaux sous la forme de 4 droites du plan. On cherche quel est le point du plan « le plus proche » de toutes les droites. Les équations sont les suivantes :

$$D_1 : \quad (x = 4) \qquad D_2 : \quad (y = 3) \qquad D_3 : \quad (x - 2y = 0) \qquad D_4 : \quad (x + y = 4)$$

Bien sûr dans le cas de deux droites le point « le plus proche » serait le point d'intersection. Dans l'idéal on aimerait donc trouver un point commun à toutes les droites, c'est-à-dire que l'on aimerait résoudre le système linéaire

$$\begin{cases} x & & = & 4 \\ & y & = & 3 \\ x & -2y & = & 0 \\ x & +y & = & 4 \end{cases}$$

Autrement dit on voudrait X avec :

$$AX = B \quad \text{où} \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Il n'y a aucune solution X à ce problème, les droites n'étant pas concourantes. On décide d'appeler point « le plus proche » la solution X du problème des moindres carrés. Ainsi

$$X = (A^T A)^{-1} A^T B$$

On calcul

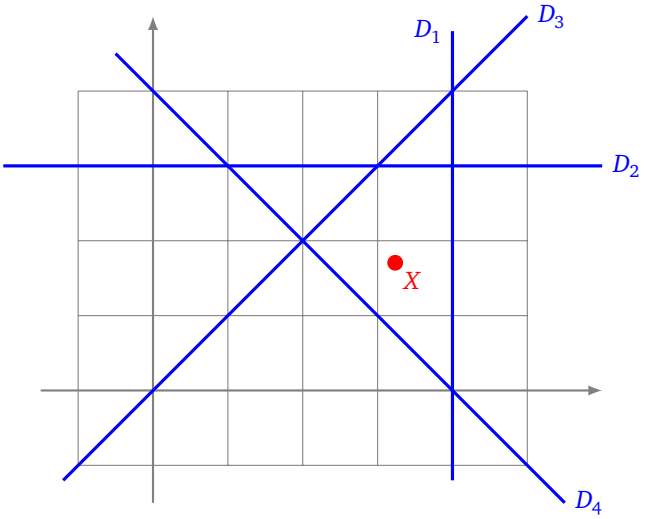
$$A^TA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{donc } (A^TA)^{-1} = \frac{1}{17}\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Donc

$$(A^TA)^{-1}A^T = \frac{1}{17}\begin{pmatrix} 6 & 1 & 4 & 7 \\ 1 & 3 & -5 & 4 \end{pmatrix}$$

et ainsi :

$$X = (A^TA)^{-1}A^TB = \begin{pmatrix} 55/17 \\ 29/18 \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 3{,}235 \\ 1{,}706 \end{pmatrix}$$



Démonstration.

1. L'existence découle du troisième point, l'unicité du deuxième.
2. On a déjà dit que l'on aimerait résoudre l'équation $AX - B = 0$, mais il n'y a pas de solution en général. On cherche donc $AX - B$ le plus petit possible. Il s'agit donc de minimiser $\|AX - B\|$, où ce qui revient au même $\|AX - B\|^2$. Comme dans le cas d'une variable, lorsqu'il y a un minimum la dérivée s'annule. On cherche donc un point où la dérivée s'annule (d dénote l'application de dérivation) :

$$\begin{aligned}
& \mathrm{d}\left(c_1^2 + c_2^2 + \cdots + c_n^2\right) = 0 \\
\iff\ & \mathrm{d}\|AX - B\|^2 = 0 \\
\iff\ & \mathrm{d}\left((AX - B)^T(AX - B)\right) = 0 \\
\iff\ & \left(\mathrm{d}(AX - B)^T\right)(AX - B) + (AX - B)^T\left(\mathrm{d}(AX - B)\right) = 0 \quad \text{par la formule } (uv)' = u'v + uv' \\
\iff\ & (A\mathrm{d}X)^T(AX - B) + (AX - B)^T(A\mathrm{d}X) = 0 \quad \text{car } A \text{ et } B \text{ sont des constantes et } X \text{ est la variable} \\
\iff\ & (2A\mathrm{d}X)^T(AX - B) = 0 \quad \text{car pour des vecteurs } u^T \cdot v = \langle u \mid v \rangle = v^T \cdot u \\
\iff\ & \mathrm{d}X^TA^T(AX - B) = 0 \\
\iff\ & \mathrm{d}X^T(A^TAX - A^TB) = 0 \quad \text{(quel que soit d}X\text{)} \\
\iff\ & A^TAX - A^TB = 0 \\
\iff\ & A^TAX = A^TB \quad \text{(attention } A^T \text{ n'est pas inversible, mais } A^TA \text{ oui)} \\
\iff\ & X = (A^TA)^{-1}A^TB
\end{aligned}$$

Conclusion : si un X existe alors il est unique et c'est $X = (A^TA)^{-1}A^TB$.

3. C'est l'une des caractérisation du projeté orthogonal : $p(B)$ est le point de ImA qui minimise la distance entre B et un point de ImA. Cette propriété entraîne en particulier l'existence de X. Vérifions que le calcul précédent coïncide avec le calcul de la projection orthogonale.

   Soit $p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ la projection orthogonale sur ImA.

   Notons $Y = p(B)$. Que Y soit la projection orthogonale de B sur ImA signifie que le vecteur $B - Y$ est orthogonal à tous vecteurs de ImA :

$$\begin{aligned}
& \langle AV \mid B - Y \rangle = 0 \quad \forall V \in \mathbb{R}^p \\
\iff \quad & \langle AV \mid B - AX \rangle = 0 \quad \forall V \in \mathbb{R}^p \quad \text{pour } Y = AX \\
\iff \quad & (AV)^T \cdot (B - AX) = 0 \quad \forall V \in \mathbb{R}^p \quad \text{car } \langle u \mid v \rangle = u^T \cdot v \\
\iff \quad & V^T A^T (B - AX) = 0 \quad \forall V \in \mathbb{R}^p \\
\iff \quad & A^T (B - AX) = 0 \\
\iff \quad & A^T AX = A^T B \\
\iff \quad & X = (A^T A)^{-1} A^T B
\end{aligned}$$

□

Bibliographie

- Stephen Bancroft, *An algebraic solution of the GPS equations.* IEEE Transactions, 1985.
- Pierre-André Chevalier, *Comment le GPS calcule-t-il sa position ?* Une introduction didactique à la géométrie du GPS. 2002.
- Wolfgang Torge, *Geodesy.* de Gruyter, 2001.

Auteurs du chapitre Arnaud Bodin
Relu par Bernard Callenaere

Les auteurs

L'équipe Exo7 est composée d'Arnaud Bodin, Léa Blanc-Centi, Niels Borne, Benjamin Boutin, Laura Desideri et Pascal Romon.
Ce livre est diffusé sous la licence *Creative Commons – BY-NC-SA – 3.0 FR*. Sur le site Exo7 vous pouvez le télécharger gratuitement et aussi récupérer les fichiers sources.

Version 0.1 – Mars 2016